FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

27.6.2013

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Lösungsvorschlag zu den Hausaufgaben der 12. Übung

Hausaufgabe 1:

Sei X ein Banachraum bezüglich der Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$, wobei für eine Konstante C die Abschätzung $\|x\|_2 \leq C\|x\|_1$ gelte. Zeige: Dann sind die beiden Normen bereits äquivalent.

Lösung:

Wende den Satz von der offenen Abbildung auf $I : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2), x \mapsto x$ an. Ihre Umkehrabbildung ist stetig, also gilt $\|x\|_1 \leq K\|x\|_2$ mit einer Konstanten K und damit folgt die behauptete Normäquivalenz.

Hausaufgabe 2:

Sei $A : l^2 \supseteq D \to l^2$ definiert durch

$$A(x_k) = (kx_k)$$

für $(x_k) \in D$.

a.) Untersuche A auf Abgeschlossenheit für die beiden Fälle

$$D = \{(x_k) \in l^2 \mid (kx_k) \in l^2\},$$

$$D = \{(x_k) \in l^2 \mid \exists N \in \mathbb{N}:\ x_k = 0\ \forall k \geq N\}.$$

b.) Seien X, Y beliebige normierte Räume, $D \subset X$ ein Unterraum und $A : D \to Y$ ein linearer Operator mit $Ax = 0$ für alle $x \in D$. Ist A abgeschlossen?

c.) Seien X, Y Banachräume und $D \subset X$ ein Unterraum. Zeige: Ist A linear, injektiv und abgeschlossen, so ist auch $A^{-1} : Y \supseteq \operatorname{ran}(A) \to X$ abgeschlossen.

Lösung:

$A : D \subset l^2 \to l^2$, $A((x_k)_k) = (kx_k)_k$ für $(x_k)_k \in D$.
a)$D = \{(x_k)_k \in l^2 | (kx_k)_k \in l^2\}$
Dann ist A abgeschlossen. Sei $(x_k^n)_k \to (x_k)_k$ für $n \to \infty$ Folge in D mit $A(x_k^n)_k \to (y_k)_k$.
Dann ist wegen $A(x_k^n)_k = (kx_k^n)_k \to (y_k)_k$, da aus Konvergenz in l^2 insbesondere Konvergenz in jeder einzelnen Komponente folgt, für alle $k \in \mathbb{N}$: $kx_k^n \to y_k$ für $n \to \infty$, also $x_k \leftarrow x_k^n \to \frac{y_k}{k}$ und damit $x_k = \frac{y_k}{k}$, folglich $A(x_k)_k = A(\frac{y_k}{k})_k = (k\frac{y_k}{k})_k = (y_k)_k$, also $Ax = y$ und damit ist A abgeschlossen.

$$D = \{(x_k)_k \in l^2 | \exists N \in \mathbb{N} : x_k = 0 \forall k \geq N\}$$

Dann ist A nicht abgeschlossen. Denn sei $((x_k^n)_k)_n$ die durch $x_k^n = \begin{cases} (\frac{1}{2})^k & k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$ gegebene Folge in $D \subset l^2$. Dann konvergiert x^n gegen $x = (x_k)_k \in l^2$ mit $x_k = (\frac{1}{2})^k$ und auch $A(x_k^n)_k$ konvergiert in l^2, nämlich gegen $y = (k(\frac{1}{2})^k)_k \in l^2$. (Die Konvergenz in l^2 folgt jeweils daraus, dass die Reihen über den Quadraten der genannten Folgen konvergieren.) Allerdings ist, obwohl $x^n \to x$ und $Ax^n \to y$, nicht $Ax = y$, da $x \notin D$ und damit Ax nicht definiert ist.

b) X, Y normierte Räume, $D \subset X$ Unterraum, $A \colon D \to Y$ linear und $A|_D = 0$.
Dann ist nicht notwendig A abgeschlossen. Betrachte den Raum $d_0 \subset l^1$ mit $d_0 = \{x_n; \sum_{n=1}^\infty nx_n = 0\}$, und definiere $A : D \to \mathbb{R}$ durch $x \mapsto \sum_{k=1}^\infty kx_k$. Dann ist $A|_D \equiv 0$, aber mit genau den für genannte Aufgabe betrachteten Folgen gilt $x^n \to x \notin D$ und klarerweise $Ax^n = 0 \to 0 =: y$, aber $Ax \neq y = 0$ (einerseits, da $x \notin D$, andererseits wäre auch $Ax \neq 0$, falls A (mit derselben Definition) für x erklärt wäre, vgl. Blatt 1 HA 4).

c) X, Y seien metrisierbare topologische Räume (sodass also Abgeschlossenheit und Folgenabgeschlossenheit äquivalent sind). Insbesondere sind damit Banachräume zugelassen, D sei eine nichtleere Teilmenge von X (zum Beispiel ein Unterraum, falls X Vektorraum). Der Operator A sei injektiv und abgeschlossen (und wenn's Spaß macht, gerne auch linear[1]). Dann ist auch die wegen der Injektivität von A existente Abbildung $A^{-1} : Y \supset \operatorname{range} A \to X$ abgeschlossen.
Denn sei $(y_n)_n \in (\operatorname{range} A)^{\mathbb{N}}$ mit

$$y_n \to y \tag{1}$$

und

$$A^{-1} y_n \to x. \tag{2}$$

Dann existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ für y_n ein (wegen der Injektivität von A sogar eindeutiges) $x_n \in D$ mit $y_n = Ax_n$ (schließlich ist $y_n \in \operatorname{range} A$). Damit geht (1) über in $Ax_n \to y$ und (2) in $x_n = A^{-1}Ax_n \to x$. Da A abgeschlossen, folgt daraus $Ax = y$ (insbesondere $x \in D$ und $y \in \operatorname{range} A$) und daher $A^{-1}y = A^{-1}Ax = x$, also ist A^{-1} abgeschlossen.

Hausaufgabe 3:

Seien E, F normierte Räume, $D \subset E$ Untervektorraum, $A \colon D \to F$ linear.

a) Ist D nicht abgeschlossen (und $E = F$), so ist $A = I$ zwar stetig, aber nicht abgeschlossen.

b) Ist E vollständig A abgeschlossen und injektiv, $A(D)$ dicht in F und A^{-1} stetig, so ist $A(D) = F$.

c) Ist A abgeschlossen und $\alpha \neq 0$, so ist auch αA abgeschlossen.

Lösung:

a) Sei $x \notin D$ mit $x_n \to x$ für eine Folge $x_n \in D$. Dann ist x_n ebenso konvergent wie die Bildfolge $Ix_n = x_n$, aber es gilt nicht $Ix = x$, da Ix garnicht definiert ist ($x \notin D$). Stetig hingegen ist die Abbildung: $x_n \to x \in D$ impliziert $Ix_n \to Ix$.

b) Es sei $f \in F$. Wir zeigen, dass f dann bereits im Definitionsbereich von A liegt.
Da das Bild dicht ist, existiert also eine Folge x_n in D mit $Ax_n \to f$. Wegen der Stetigkeit des linearen Operators A^{-1} erhalten wir aus der Cauchyfolgeneigenschaft von Ax_n auch die von x_n und wegen der Vollständigkeit von E konvergiert diese Folge: $x_n \to x$. Da A abgeschlossen ist, folgt $x \in D$ und $Ax = f$, also $f \in A(D)$. Das war zu zeigen.

c) (wie in der Präsenzaufgabe): (Im Fall $\alpha = 0$ handelt es sich um den Nulloperator, der auf D aber nur abgeschlossen ist, wenn D abgeschlossen ist. Wir vernachlässigen diesen Fall rechtfertigungslos.) $x_n \to x$, $\alpha Ax_n \to y$ bedeutet auch $Ax_n = \alpha^{-1}\alpha Ax_n \to \alpha^{-1}y$ also $Ax = \alpha^{-1}y$ und demzufolge $\alpha Ax = \alpha\alpha^{-1}y = y$.

Hausaufgabe 4:

Seien $L, L_n : (C^1([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ definiert durch $Lf = f'$ und

$$L_n(f)(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t) - f(t-1/n)}{1/n} & \text{für } t \in (0,1] \text{ mit } t - 1/n \geq 0, \\ n(f(1/n) - f(0)) & \text{sonst,} \end{cases}$$

für $f \in C^1([0,1])$, $n \in \mathbb{N}$. Beweise die folgenden Aussagen:

$a.$) L ist abgeschlossen, aber nicht stetig.

$b.$) L_n ist beschränkt für alle $n \in \mathbb{N}$.

$c.$) Für alle $f \in C^1([0,1])$ ist $L_n f \to Lf$ für $n \to \infty$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$.

[1] sofern die Wahl von X, Y und D das zulässt...

d.) L_n konvergiert nicht gegen L bezüglich der Operatornorm.

Lösung:
$L_n, L\colon (C^1([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ seien die durch $Lf = f'$ und

$$L_n(f)(t) = \begin{cases} \frac{f(t)-f(t-\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} & t \in (\frac{1}{n}, 1] \\ \frac{f(\frac{1}{n})-f(0)}{\frac{1}{n}} & t \in [0, \frac{1}{n}] \end{cases}$$

definierten (offensichtlich linearen) Operatoren.
a) Sei $f_n \to f$ in $(C^1([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ (also insbesondere $f_n(x) \to f(x)$ für eine feste Stelle $x \in [0,1]$) mit $Lf_n = f_n' \to g$ in $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$, also $f_n' \to g$ gleichmäßig. Mit einem Satz aus Analysis I oder II folgt damit auch $f' = g$, also $Lf = g$, das heißt also L ist abgeschlossen.
Allerdings ist L nicht stetig, denn für $f_k(x) = x^k$ ist $\|f_k\| = 1$, aber $\|Lf_k\| = k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und damit L unbeschränkt.

b) Für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ ist L_n beschränkt. Klar, denn $\|L_n f\|_\infty \leq \frac{\|f\|_\infty + \|f\|_\infty}{\frac{1}{n}} \leq 2n\|f\|_\infty$.

c) Sei $f \in C^1([0,1])$. Dann konvergiert $L_n f$ für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen Lf. Sei $\varepsilon > 0$. Da $f \in C^1([0,1])$, ist f' gleichmäßig stetig und es gibt daher $\delta > 0$ sodass $|f'(x) - f'(y)| < \varepsilon$, falls nur $|x - y| < \delta$. Sei $n > \frac{2}{\delta}$. Sei $x \in [0,1]$. Dann ist (falls $x > \frac{1}{n}$) mit einem $\xi \in [x - \frac{1}{n}, x]$ nach dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned} |Lf(x) - L_n f(x)| &= |f'(x) - \frac{f(x) - f(x - \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}| \\ &= |f'(x) - f'(\xi)| < \varepsilon, \end{aligned}$$

da $|\xi - x| \leq \frac{1}{n} \leq \delta$.
Falls $x \leq \frac{1}{n}$, ist mit $\xi \in [0, \frac{1}{n}]$, also wiederum $|\xi - x| < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} < \delta$

$$\begin{aligned} |Lf(x) - L_n f(x)| &= |f'(x) - \frac{f(\frac{1}{n}) - f(0)}{\frac{1}{n}}| \\ &= |f'(x) - f'(\xi)| < \varepsilon, \end{aligned}$$

insgesamt ist also $\sup_{x \in [0,1]} |Lf(x) - L_n f(x)| < \varepsilon$, also $L_n f$ gleichmäßig konvergent gegen Lf.

d) L_n konvergiert nicht bezüglich der Operatornorm gegen L; andernfalls wäre ja, da die L_n stetig sind, L auch stetig, im Widerspruch zu a).