FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

4.7.2013

Lösungsvorschlag zu den Hausaufgaben der 13. Übung

Hausaufgabe 1:

Es sei E ein normierter Raum und $M \subset E$ sowie $x \in E$. Zeige: Genau dann gilt $x \in \overline{\operatorname{span} M}$, wenn jede stetige Linearform, die auf M nur den Wert 0 annimmt, auch in x null ist.

Lösung:

Ist $x \in \overline{\operatorname{span} M}$, so existiert eine Folge x_n in $\operatorname{span} M$ mit $x_n \to x$. Da jede stetige Linearform f, die auf M null ist, auch auf $\operatorname{span} M$ verschwindet (Linearität), ist (Stetigkeit) $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$.
Angenommen, $x \notin \overline{\operatorname{span} M}$. Dann ist $\operatorname{dist}(x, \operatorname{span} M) > 0$ und es gibt ein stetiges lineares Funktional, das auf $\overline{\operatorname{span} M}$ null ist, auf $\operatorname{span}(x)$ aber nicht. Setze dieses mittels Hahn-Banach auf den ganzen Raum fort.
Siehe auch Folgerung 3.15.

Hausaufgabe 2:

Sei E ein normierter Raum und I eine Indexmenge. Seien $x_i \in E$ linear unabhängig und $c_i \in \mathbb{K}$ für $i \in I$. Zeige die Äquivalenz von

a) Es existiert $f \in L(E, \mathbb{K})$ mit $f(x_i) = c_i$ für alle $i \in I$.

b) Es gibt $M \geq 0$, sodass für alle endlichen Teilmengen $J \subset I$ die Ungleichung

$$\left| \sum_{j\in J} \lambda_j c_j \right| \leq M \| \sum_{j \in J} \lambda_j x_j \|$$

erfüllt ist.

Lösung:

Dass a) auch b) impliziert, ist klar mit $M = \|f\|$:

$$\left| \sum_{j\in J} \lambda_j c_j \right| = \left| \sum_{j\in J} \lambda_j f(x_j) \right| = \left| f(\sum_{j\in J} \lambda_j x_j) \right| \leq \|f\| \| \sum_{j\in J} \lambda_j x_j) \|.$$

Für $b \Rightarrow a$ betrachte

$$\varphi(\sum_{j\in J} \lambda_j x_j) := \sum_{j\in J} \lambda_j c_j,$$

was nach der Voraussetzung aus b) ein stetiges Funktional auf $\operatorname{span} x_i; i \in I$ definiert. Es sei dann f die stetige lineare Fortsetzung von φ auf den ganzen Raum (mittels Hahn-Banach).

Hausaufgabe 3:

Informiere dich in einem Funktionalanalysisbuch, was der *Trennungs*satz von Hahn-Banach aussagt. Stelle seine Aussage auch zeichnerisch dar. Wie geht der Hahn-Banachsche Fortsetzungssatz in den Beweis ein?

Lösung:

Siehe z.B. Werner, Funktionalanalysis, Seite 100ff (Seitenangaben bezogen auf 7. Auflage)

Hausaufgabe 4:
Sei $X := C^1([0,1]), |||\cdot|||)$ mit
$$|||f||| := \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}.$$
Sei $U := \{f \in X : f(0) = 0\}$ und $\varphi : U \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$\varphi(f) := \int_0^1 \frac{f(t)}{t} dt, \;\; f \in U.$$

a.) Zeige: $\varphi \in U'$ mit $\|\varphi\| = 1$.

b.) Konstruiere eine stetige und normerhaltende lineare Fortsetzung $\Phi : X \to \mathbb{R}$ von φ.

Lösung:
Seien $X = C^1([0,1], |||\cdot|||)$, $|||f||| = \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}$. $U = \{f \in X, f(0) = 0\}$, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch
$$\varphi(f) = \int_0^1 \frac{f(t)}{t} dt.$$
Dann ist wegen der Linearität des Integrals auch φ linear. Außerdem gibt es nach dem Mittelwertsatz für $f \in U$ und $x \in (0,1]$ ein $\xi \in (0,x)$, sodass
$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi)$$
und damit insbesondere
$$|\frac{f(x)}{x}| \leq \|f'\|_\infty \leq |||f|||.$$
Das bedeutet, dass
$$|\varphi(f)| = |\int_0^1 \frac{f(t)}{t} dt| \leq \int_0^1 \|f'\|_\infty dt = \|f'\|_\infty \tag{1}$$
und demzufolge
$$|\varphi(f)| \leq 1$$
also φ stetig mit Norm ≤ 1. Da für $f = id$ (mit $|||f||| = 1$) $\varphi f = \int_0^1 \frac{t}{t} dt = 1$, ist auch $\|\varphi\| \geq 1$ und daher $\|\varphi\| = 1$.
Definiere $\Phi : X \to \mathbb{R}$ durch $\Phi(f) = \varphi(f - f(0))$. Dann ist Φ linear, denn für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $f, g \in X$ ist
$$\Phi(\lambda f + \mu g) = \varphi(\lambda f - \lambda f(0) + \mu g - \mu g(0)) = \lambda\varphi(f - f(0)) + \mu\varphi(g - g(0)) = \lambda\Phi(f) + \mu\Phi(g),$$
und darüberhinaus stetig, denn für $f \in X$ ist nach (1)
$$|\Phi(f)| = |\varphi(f - f(0))| \leq \|(f - f(0))'\|_\infty = \|f'\|_\infty \leq |||f|||,$$
insbesondere ist auch $\|\Phi\| \leq 1$. Ferner ist Φ eine Fortsetzung von φ und damit auch $\|\Phi\| \geq \|\varphi\|$.
Insgesamt ist so Φ eine stetige, normerhaltende lineare Fortsetzung von φ.

Hausaufgabe 5:
Es sei $G \subset l^1$ mit $G = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1 : x_1 = x_3 = x_5 = \ldots = 0\}$. Zeige, dass mit einer Ausnahme (welcher?) jedes stetige Funktional auf G unendlich viele stetige, lineare Fortsetzungen mit gleicher Norm auf l^1 zulässt. Benutze dazu, dass sich jedes stetige lineare Funktional $g\colon l^1 \to \mathbb{R}$ mithilfe einer beschränkten Folge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als $g(x) = \sum_{n=1}^\infty \xi_n x_n$ darstellen lässt und dann $\|g\| = \|\xi\|_\infty$ gilt.

Der Fachschaftsrat lädt ein zum Spieleabend am **Donnerstag, den 11. Juli 2013, ab 18:03 Uhr** im LuDi.

Lösung:

Sei $f\colon G \to \mathbb{R}$ ein stetiges lineares Funktional (außer dem Nullfunktional). Dieses lässt sich als $\widetilde{f}$ auf l^1 fortsetzen und es existiert eine beschränkte Folge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\widetilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n$ für alle $x \in l^1$.
Für $g \in G$ ist also

$$f(g) = \widetilde{f}(g) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n g_n = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{2n} g_{2n}.$$

Und $\|f\| = \sup |\xi_{2n}|$. ($\leq$ klar nach Dreiecksungleichung; $\geq$ durch Einsetzen von $g = e_{2n}$.)
Jede Folge y_n mit

$$y_{2n} = \xi_{2n}$$

und

$$|y_{2n+1}| \leq \sup |\xi_{2n}|$$

definiert nun durch

$$Y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

ein normerhaltendes stetiges lineares Funktional auf l^1, das f fortsetzt.