FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

11.7.2013

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Lösungsvorschlag zu den Hausaufgaben der 14. Übung

Hausaufgabe 1:

Zeige: Reflexive normierte Räume sind stets Banachräume.

Lösung:

Reflexive normierte Räume stimmen insbesondere mit ihrem Bidual überein (sind ihm isomentrisch isomorph). Der Bidual ist als Raum stetiger linearer Abbildungen in einen vollständigen Raum (nämlich den Körper) vollständig. (Siehe Satz 2.5)

Hausaufgabe 2:

Seien X, Y Banachräume. Seien $A : X \to Y$ und $B : Y' \to X'$ linear mit

$$y'(Ax) = (By')(x) \quad \forall x \in X,\ y' \in Y'.$$

Zeige, dass A und B stetig sind.

Lösung:

X, Y Banachräume, $A : X \to Y$, $B : Y' \to X'$, $y'(Ax) = (By')(x)\ \forall x \in X, y' \in Y'$. Dann sind A und B stetig.
Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen genügt es, zu zeigen, dass A und B abgeschlossen sind.
Sei $x_n \to x$, $Ax_n \to y$ und $y' \in Y'$. Dann ist $Ax = y$, denn wegen $x_n \to x$ und $By' \in X'$ gilt auch $By'(x_n) \to By'(x)$, also

$$< y', Ax_n >=< By', x_n >\to< By', x >=< y', Ax >$$

(und somit $Ax_n \rightharpoonup Ax$)[1]. Zusammen mit $Ax_n \to y$ folgt also aus der Beliebigkeit er Wahl von y', dass $y = Ax$, also ist A abgeschlossen und damit stetig.
Der Beweis für die Abgeschlossenheit von B verläuft analog: $y'_n \to y'$, $By'_n \to x'$, $x \in X$;

$$< By'_n, x >=< y'_n, Ax >\to< y', Ax >=< By', x >,$$

(also $By'_n \rightharpoonup^* By'$), ergo $By' = x'$, B abgeschlossener linearer Operator zwischen den Banachräumen Y' und X', also nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen stetig.

Hausaufgabe 3:

Sei X reflexiv. Zeige: Dann ist auch X' reflexiv.

Lösung:

Sei $x''' \in X'''$. Zu zeigen ist die Existenz eines $x' \in X'$, sodass für alle $x'' \in X''$ gilt

$$x'''(x'') = x''(x').$$

Definiere x' durch

$$x'(x) = x'''(x'') = x'''(j_X(x)),$$

also durch Auswertung von x''' auf dem dank der kanonischen Injektion zu x gehörigen x''.
Das liefert ein stetiges lineares Funkional, da x''' und j_X stetig und linear sind und damit auch ihre Komposition.

[1] Diese Bezeichnung braucht man hier noch nicht zum Verständnis.

Nun gibt es wegen der Surjektivität von j_X (X ist reflexiv) zu jedem $x'' \in X''$ auch ein $x_{x''} \in X$ mit $j_X(x_{x''}) = x''$. Daher:

$$x'''(x'') = x'''(j_X(x_{x''})) = x'(x_{x''}) = x''(x').$$

qed. (Nur nicht von den vielen Strichen verwirren lassen!)

Hausaufgabe 4:

Ein reflexiver Raum ist genau dann separabel, wenn sein Dual es ist. Hinweis: Blatt 13.

Lösung:

Sei X dieser reflexive Raum und separabel. Da X separabel und X zu X'' isometrisch isomorph ist, folgt mit Präsenzaufgabe 3 von Blatt 13, dass X' separabel ist. Dass aus Separabilität von X' die von X folgt, war gerade die Aussage dieser Aufgabe.

Hausaufgabe 5:

Zeige:

$$L^1(0,1) \subsetneqq (L^\infty(0,1))'.$$

Hinweis: Betrachte für $x \in [0,1]$ und $f \in C([0,1])$ das durch $\delta_x(f) = f(x)$ definierte Funktional und setze dieses mit Hilfe des Satzes von Hahn - Banach stetig auf $L^\infty(0,1)$ fort. Du darfst ohne Beweis folgendes Resultat verwenden: Sei $u \in L^1(0,1)$ mit

$$\int_0^1 uf\ dx = 0\ \forall f \in C_c(0,1).$$

Dann gilt $u = 0$ fast überall auf $(0,1)$.

Lösung:

$L^1(0,1) \subsetneq (L^\infty(0,1))'$.

Klarerweise wird für jedes $f \in L^1(0,1)$ durch $g \mapsto \int_0^1 f(x)g(x)dx$ ein stetiges lineares Funktional auf L^∞ definiert, also $L^1(0,1) \subset (L^\infty(0,1))'$. Zu zeigen ist, dass nicht alle stetigen linearen Funktionale auf $L^\infty(0,1)$ sich durch L^1-Funktionen darstellen lassen.

Sei dazu $x \in (0,1)$ und $\delta_x : C[0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $\delta_x(f) = f(x)$ für $f \in C[0,1]$. Dann ist δ_x ein stetiges lineares Funktional auf dem Unterraum $C[0,1]$ von $L^\infty(0,1)$ und nach dem Satz von Hahn-Banach existiert eine stetige lineare Fortsetzung Δ mit gleicher Norm auf ganz $L^\infty(0,1)$.

Angenommen, es gäbe eine Funktion $u \in L^1$, sodass Δ sich schreiben ließe als $\Delta(f) = \int_0^1 uf\,dx$.

Dann wäre für alle $\varphi \in C_0^\infty([0,1] \setminus \{x\})$

$$\int_0^1 u\varphi dx = \Delta(\varphi) = \delta_x(\varphi) = \varphi(x) = 0,$$

nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung also $u = 0$ fast überall auf $[0,1] \setminus \{x\}$ und damit fast überall auf $[0,1]$. Damit wäre aber für beliebige Funktionen $f \in L^\infty(0,1)$ dann $\Delta(f) = 0$, ein Widerspruch zur Wahl von δ_x.

Hausaufgabe 6:

X sei ein reflexiver Banachraum und $U \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Zeige: U ist reflexiv.

Betrachte dazu zu $u'' \in U''$ die Abbildung $x' \mapsto u''(x'|_U)$. Weise nach, dass sie in X'' liegt, nutze Reflexivität von X und führe die Annahme $x \notin U$ (für welches x wohl?) mithilfe des Satzes von Hahn-Banach auf einen Widerspruch.

Lösung:

Sei $u'' \in U''$. Wir müssen zeigen, dass ein $u \in U$ existiert, sodass für alle $u' \in U'$ dann

$$u''(u') = u'(u)$$

gilt.
Wir untersuchen die Abbildung
$$\Phi\colon x' \mapsto u''(x'|_U).$$
Sie liegt in X'', denn u'' ist stetig und daher ist
$$|\Phi(x')| = |u''(x'|_U)| \leq \|u''\|\|x'|_U\| \leq \|u''\|\|x'\|.$$
Da X reflexiv ist, gibt es also $x \in X$ mit $\Phi(x') = x'(x)$ für alle $x' \in X'$.
Angenommen, $x \notin U$.
Dann gibt es ein stetiges lineares Funktional $f\colon X \to \mathbb{R}$ mit $f|_U = 0$ und $f(x) = 1$. (Hahn-Banach. Wichtig hierbei: Abgeschlossenheit von U, sonst muss der Abstand von x zu U nicht positiv sein.)
Für dieses f gilt dann nach unseren bisherigen Feststellungen $0 = \Phi(f) = f(x) = 1$, ein Widerspruch.

Hausaufgabe 7:

Folgere aus zwei anderen Aufgaben mit einem kurzen Argument, dass ein Banachraum genau dann reflexiv ist, wenn sein Dual es ist.

Lösung:
Nach HA 3 ist der Dual eines reflexiven Raumes reflexiv. Ist der Dual reflexiv, so auch der Bidual und damit nach HA 6 auch der Raum selbst als abgeschlossener Teilraum seines Biduals.