FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

18.7.2013

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Lösungsvorschlag zu den Hausaufgaben der 15. Übung

Hausaufgabe 1:

Sei X ein reflexiver Banachraum und $K \subset X$ abgeschlossen und konvex sowie $x \in X \setminus K$. Zeige: Es gibt $y \in K$ mit $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, K)$.

Lösung:

y_n sei Folge in K, sodass $\|y_n - x\| \to \operatorname{dist}(x, K)$. Dann ist (y_n) beschränkt ($\|y_n\| \le \|x\| + \|y_n - x\|$ und $\|y_n - x\|$ ist beschränkt, weil konvergent), es gibt also, da X reflexiv ist, eine schwach konvergente Teilfolge. Deren Grenzwert sei y. Es ist $y \in K$, denn K ist als abgeschlossene, konvexe Menge auch schwach abgeschlossen (Folgerung aus dem Hahn-Banachschen Trennungssatz). Um zu zeigen, dass $\|y - x\| \le \liminf \|y_n - x\|$, verwendet man die schwache Unterhalbstetigkeit der Norm. Da $\|y - x\|$ zugleich $\ge \inf_{z \in K} d(x, z)$ ist, folgt die Behauptung.

Hausaufgabe 2:

X sei normierter Raum. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X'$ sei schwach konvergent. Zeige: f_n konvergiert auch schwach*.

Lösung:

j_X sei die kanonische Einbettung von X in den Bidual. Zu $x \in X$ gilt dann

$$\langle f_n, x \rangle = \langle j_X(x), f_n \rangle \to \langle j_X(x), f \rangle = \langle f, x \rangle.$$

Hausaufgabe 3:

Es sei $X = c_0$. Zeige, dass in $l^1 = X'$ die Folge der Einheitsvektoren e_n zwar schwach*, aber nicht schwach gegen 0 konvergiert.

Lösung:

Sei $x \in c_0$. Dann ist $\langle e_n, x \rangle = x_n \to 0$, da x Nullfolge ist. (Also ist e_n schwach* konvergent gegen 0. Aber der Dual von l^1 ist l^∞ und zu $x \in l^\infty$ mit $x = (1, 1, 1, 1, ...)$ ist $\langle x, e_n \rangle = x_n = 1 \to 1$, also nicht $e_n \rightharpoonup 0$. (Siehe aber vorhergehende Aufgabe: Im Falle von Konvergenz müssten die Grenzwerte übereinstimmen.)

Hausaufgabe 4:

Es seien X, Y normierte Räume und $T \colon X \to Y$ linear. Zeige: T ist stetig, genau dann wenn T schwach konvergente Folgen auf schwach konvergente Folgen abbildet.

Lösung:

Hausaufgabe 5:

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) = ne^{-nx}$. Zeige: Keine Teilfolge von (f_n) konvergiert schwach in $L^1(0,1)$, obwohl f_n beschränkt ist. Untersuche f_n auch auf punktweise Konvergenz und L^1-Konvergenz.

Lösung:
Punktweise: Konvergenz gegen 0.
L^1: Berechne $\|f_n - 0\|_{L^1} = \int_0^1 ne^{-nx}\ \mathrm{d}x = 1 - e^{-n} \to 1$, also keine Konvergenz.
An der Berechnung der L^1-Norm sieht man auch, dass die Folge in L^1 beschränkt ist.
Angenommen, die Teilfolge f_{n_k} konvergierte schwach gegen $f \in L^1$. Dann wäre, da $f \mapsto \int_0^\varepsilon f$ eine stetige lineare Abbildung von L^1 nach $\mathbb{R}$ definiert,

$$\int_0^\varepsilon f_{n_k}(x)\ \mathrm{d}x \to \int_0^\varepsilon f(x)\ \mathrm{d}x$$

und

$$\int_0^\varepsilon f_{n_k}(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^\varepsilon n_k e^{-n_k x}\ \mathrm{d}x = 1 - e^{-n_k \varepsilon} \to 1$$

für $k \to \infty$, also für alle $1 > \varepsilon > 0$

$$1 = \int_0^\varepsilon f(x)\ \mathrm{d}x$$

Für $\varepsilon \to 0$ folgt daraus (siehe Ana III, Satz von Lebesgue...) dann

$$1 = 0,$$

ein Widerspruch.