FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

18.4.2013

Lösungsvorschlag zu den Hausaufgaben der 2. Übung

Hausaufgabe 1:

Zeige:

a) Abgeschlossene Teilmengen vollständiger metrischer Räume sind selbst wieder vollständige metrische Räume.

b) Kompakte metrische Räume sind vollständig.

c) Kompakte metrische Räume sind separabel.

Zeige eine zu a) analoge Aussage für Banachräume.
Wie muss man a) dazu umformulieren?

Lösung:

a) Leicht zu sehen ist, dass die Einschränkung der Metrik auf die Teilmenge ihres Definitionsbereichs wieder eine Metrik ist. Zu zeigen bleibt Vollständigkeit. Gegeben sei also eine Cauchyfolge in der Teilmenge. Sie konvergiert wegen der Vollständigkeit des metrischen Raumes. Konvergiert sie auch in der Teilmenge? Das ist die Frage danach, ob ihr Grenzwert auch wieder in dieser Teilmenge liegt oder nur außerhalb. Die Teilmenge ist aber abgeschlossen, muss den Limes also enthalten.

b) Sei $(x_n)_n$ Cauchyfolge. Sie hat (Kompaktheit!) eine konvergente Teilfolge und ist daher (vgl. Ana I) konvergent. qed.

c) Nehme die Mittelpunkte der endlich vielen $\frac{1}{n}$-Kugeln, die nötig sind, um den metrischen Raum zu überdecken. Das wiederhole man für jedes $n \in \mathbb{N}$ und vereinige die Mengen. Das Ergebnis ist eine abzählbare (abzählbare Vereinigung endlicher Mengen) Menge, die dicht liegt. (Nach Konstruktion gibt es zu jedem Punkt und jedem $\frac{1}{n}$ einen Punkt in der Menge mit kleinerer Entfernung.)

Abgeschlossene Untervektorräume (nicht nur Teilmengen!) von Banachräumen sind Banachräume. Sie sind Unterräume (n. Vor.) und vollständig nach a).

Hausaufgabe 2:

Es sei M eine Menge und d_1, d_2 zwei Metriken auf M. d_1 und d_2 heißen äquivalent, falls es für alle $x \in M$ und alle $\varepsilon > 0$ Zahlen δ_1, $\delta_2 > 0$ gibt, so dass

$$B_{d_1}(x, \delta_1) \subset B_{d_2}(x, \varepsilon),\ B_{d_2}(x, \delta_2) \subset B_{d_1}(x, \varepsilon).$$

$a.$) Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

1) d_1 und d_2 sind äquivalent
2) (M, d_1) und (M, d_2) haben die gleichen offenen Mengen
3) (M, d_1) und (M, d_2) haben die gleichen konvergenten Folgen

$b.$) Sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass durch $\overline{d}(x, y) := \min\{d(x, y), 1\}$ eine zu d äquivalente Metrik definiert ist.

Lösung:

a) Wir zeigen die einzelnen Implikationen. Dabei verwenden wir das folgende Lemma:
In metrischen Räumen ist die Definition der Folgenkonvergenz mit ε äquivalent dazu, dass für jede offene Menge U mit $x \in U$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\forall n > N$: $x_n \in U$.
Beweis:

$\Rightarrow$ Sei U offen, $x \in U$, $x_n \to x$. Da U offen, existiert $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset U$. Aus $x_n \to x$ folgt: $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : d(x_n, x) < \varepsilon$, damit aber $x_n \in B_\varepsilon(x)$, also $x_n \in U$ für alle $n \geq N$.

$\Leftarrow$ Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $B_\varepsilon(x)$ offen, also existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $\forall n \geq N : x_n \in B_\varepsilon(x)$ und demnach $d(x_n, x) < \varepsilon$. D.h.: $x_n \to x$.

1) $\Longrightarrow$ 2) Sei U offen in (M, d_1). Sei $x \in U$. Dann existiert $\varepsilon > 0$ mit $B^{d_1}_\varepsilon(x) \subset U$. Da d_2 äquivalent zu d_1 ist, existiert $\delta_2 > 0$ mit $B^{d_2}_{\delta_2}(x) \subset B^{d_1}_\varepsilon(x)$ und damit $B^{d_2}_{\delta_2}(x) \subset U$, also ist U offen in (M, d_2).
Analog folgt aus Offenheit in (M, d_2) die in (M, d_1).

2) $\Longrightarrow$ 3) Sei $x_n \to x$ in d_1, sei $U \ni x$ eine in d_2 offene Menge.
Dann ist U auch in d_1 offen (nach Voraussetzung) und enthält (immer noch) x. Daher $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : x_n \in U$ nach dem Lemma.
Somit folgt aus dem Lemma $x_n \to x$ in d_2. Analog folgt aus $x_n \to x$ in d_2 dieselbe Konvergenz bezüglich d_1.

3) $\Longrightarrow$ 1) Angenommen, (M, d_1) und (M, d_2) wären nicht äquivalent, o.E. wäre also für die festen $x \in M$ und $\varepsilon > 0$ für jedes $\delta > 0$ dann $B^{d_2}_\delta(x) \not\subset B^{d_1}_\varepsilon(x)$.
Wähle $\delta_n = \frac{1}{n}$ und dazu $x_n \in B^{d_2}_{\delta_n}(x) \setminus B^{d_1}_\varepsilon(x)$. Dann $x_n \to x$ in d_2 und damit wegen 3) auch $x_n \to x$ in d_1, aber $\exists \varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} : x_n \notin B^{d_1}_\varepsilon(x)$, ein Widerspruch.

b) i) $\overline{d}$ ist Metrik.
$\overline{d}(x, y) = 0 \iff \min\{d(x, y), 1\} = 0 \iff d(x, y) = 0 \iff x = y$
$\overline{d}(y, x) = \min\{d(y, x), 1\} = \min\{d(x, y), 1\} = \overline{d}(x, y)$
Seien $x, y, z \in M$.
1. Fall: $d(x, y) < 1, d(y, z) < 1$: $\overline{d}(x, z) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = \overline{d}(x, y) + \overline{d}(y, z)$. 2. Fall: $d(x, y) \geq 1 \vee d(y, z) \geq 1$: $\overline{d}(x,) + \overline{d}(y, z) \geq 1 + 0 \geq \min\{1, d(x, z)\} = \overline{d}(x, z)$.

ii) $d, \overline{d}$ haben dieselben konvergenten Folgen.
Sei $x_n \to x$ in d.
Sei $\varepsilon > 0$. OBdA ist $\varepsilon < 1$. Dann $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N d(x_n, x) < \varepsilon$. Daraus folgt: $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \overline{d}(x_n, x) = \min\{d(x_n, x), 1\} \leq \min\{\varepsilon, 1\} = \varepsilon$. Also $x_n \to x$ in $\overline{d}$.
Sei $x_n \to x$ in $\overline{d}$.
Sei $\varepsilon > 0$ und oBdA $\varepsilon < 1$. Dann $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \overline{d}(x_n, x) < \varepsilon$, d.h. $\min\{d(x_n, x), 1\} < \varepsilon$. Da $1 \geq \varepsilon$ folgt aus $\min\{d(x_n, x), 1\} < \varepsilon$, dass $d(x_n, x) < \varepsilon$. Daher $x_n \to x$ in d.

Hausaufgabe 3:

a.) Sei $1 < p < q < \infty$. Zeige die Inklusion $l^1 \subset l^p \subset l^q \subset l^\infty$.
b.) Zeige, dass für alle $x \in l^1$ gilt:

$$\lim_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

Lösung:

a) Sei zunächst $x := (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in l^1. Dann gilt nach Definition

$$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$$

und wir können ein $N \in \mathbb{N}$ finden mit

$$|x_n| < 1 \quad \forall n \geq N$$

Für $\infty > p > 1$ ist nun

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = \sum_{n=1}^{N-1} |x_n|^p + \sum_{n=N}^{\infty} |x_n|^p \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{N-1} |x_n|^p}_{\substack{\text{endliche} \\ \text{Summe}}} + \underbrace{\sum_{n=N}^{\infty} |x_n|}_{<\infty \text{ n. V.}} < \infty$$

und somit $x \in l^p$. Wählen wir $x \in l^p$ folgt analog $x \in l^q$. Somit bleibt zu zeigen, dass

$$x \in l^q,\ 1 \leq q < \infty \implies x \in l^\infty\,.$$

Nach Voraussetzung gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n| < 1$ für $n \geq N$. Folglich ist

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| = \max\{a_1, \dots, a_{N-1}, 1\} < \infty\,.$$

b) Für $x \in l^1$ mit $x = 0$ ist die Aussage klar. Sei also $x \neq 0$ und setze

$$k := \min\{\, n \in \mathbb{N} : |x_n| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \,\} \quad \text{(Warum existiert das Minimum?)}\,.$$

Dann ist $|x_k| = \|x\|_\infty$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|x_n|}{|x_k|}\right)^p = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \neq k}} \left(\frac{|x_n|}{|x_k|}\right)^p + \left(\frac{|x_k|}{|x_k|}\right)^p \geq 1 \iff \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \geq |x_k|^p \iff \|x\|_p \geq |x_k| = \|x\|_\infty\,.$$

Andererseits ist

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \leq \left(n \cdot \|x\|_\infty^p\right)^{1/p} = n^{1/p} \cdot \|x\|_\infty,$$

sodass

$$\|x\|_\infty \xleftarrow{n\to\infty} \|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \cdot \|x\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} \|x\|_\infty$$

und daher nach dem *Einschließungskriterium*

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

Hausaufgabe 4:

Es seien X, Y normierte Räume und $f\colon X \to Y$ eine lineare Abbildung.
Zeige: f ist genau dann stetig, wenn

$$\sup_{x \in X, \|x\|=1} \|f(x)\|_Y$$

beschränkt ist.
Zeige weiterhin: Dies ist gleichbedeutend mit Lipschitz-Stetigkeit von f und gleichbedeutend mit Stetigkeit von f an der Stelle 0.
Gilt das auch für nichtlineare Abbildungen?

Lösung:
s. Skript, S. 32f.