FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

25.4.2013

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Lösungsvorschlag zu den Hausaufgaben der 3. Übung

Hausaufgabe 1:
Zeige, dass es genau eine stetige Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt, die der Gleichung

$$f(x) = x + \frac{1}{2}\sin(f(x)), \quad \forall\, x \in [0,1]$$

genügt.

Lösung:
Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} T\colon C[0,1] &\to C[0,1] \\ f &\mapsto \{x \mapsto x + \frac{1}{2}\sin(f(x))\}. \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert ($x \mapsto x + \frac{1}{2}\sin(f(x))$ ist stetig) und bildet einen vollständigen metrischen Raum $((C[0,1], \|\cdot\|_\infty))$ in sich selbst ab. Es gilt

$$\|Tf - Tg\| = \frac{1}{2}\|\sin(f) - \sin(g)\|.$$

Nun ist

$$|\sin(f(x)) - \sin(g(x))| = |\frac{\sin(f(x)) - \sin(g(x))}{f(x) - g(x)}||f(x) - g(x)| = |\cos(\xi)||f(x) - g(x)| \leq |f(x) - g(x)|$$

(Sollte $f(x) = g(x)$ sein, gilt die gesamte Abschätzung noch immer, auch wenn die Zwischenschritte natürlich so nicht mehr möglich sind.)
Insgesamt ist also (durch Supremumsbildung)

$$\|Tf - Tg\| \leq \frac{1}{2}\|f - g\|.$$

T ist kontrahierende Selbstabbildung eines vollständigen Raumes, hat also nach dem BFPS genau einen Fixpunkt f mit $f = Tf$, also gibt es genau eine Funktion in $C[0,1]$, die die Gleichung löst.

Hausaufgabe 2:
Gegeben seien ein vollständiger metrischer Raum (X, d). Die Abbildung $F\colon X \to X$ habe eine der folgenden Eigenschaften.

a) Es gebe $m \in \mathbb{N}$, $k \in (0,1)$ mit $d(F^m x, F^m y) \leq kd(x,y)$.

b) (X, d) sei kompakt und für $x \neq y$ gelte $d(Fx, Fy) < d(x,y)$.

c) $d(F(x), F(y)) \leq kd(x, F(x)) + kd(y, F(y))$ für ein $k < \frac{1}{2}$.

Zeige: F hat genau einen Fixpunkt z und es gilt $F^n x \to z$ für alle $x \in X$.

Lösung:

a) Eindeutigkeit: Hätte F zwei Fixpunkte $x \neq y$, wären dies auch Fixpunkte von F^m. F^m hat aber nach dem Banachschen Fixpunktsatz genau einen Fixpunkt.
Existenz: Wir bezeichnen diesen eindeutigen Fixpunkt von F^m als z. Dann ist für $x \in X$ auch $z = \lim_{n\to\infty}(F^m)^n x$ und damit

$$d(z, Fz) = \lim_{n\to\infty} d(F^{mn}x, Fz) = \lim_{n\to\infty} d(F^m F^{m(n-1)}x, FF^m z) = \lim_{n\to\infty} d(F^m F^{m(n-1)}x, F^m Fz \leq \lim_{n\to\infty} kd(F^m(n-1)x, Fz)$$

also $d(z, Fz) = 0$ und damit z auch Fixpunkt von F.
Noch zu zeigen ist die Konvergenz $F^n x \to z$. Es sei $x_0 \in X$ beliebig und $x_{n+1} = Fx_n$. Dann ist für $n > m$ nach Voraussetzung $d(x_n, z) < kd(x_{n-m}, z)$ und damit

$$d(x_n, z) < k^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor} \max\{d(x_i, z); i = 0, \ldots, m-1\} \to 0.$$

b) Eindeutigkeit: $x \neq y$ FP. Dann $d(x, y) = d(Fx, Fy) < d(x, y)$ (geht nicht) oder $x = y$.
Existenz: Es sei $x_0 \in X$ und $x_n = F^n x_0$.
Falls für ein n_0 gilt, dass $F^{n_0}x_0 = F^{n_0+1}x_0$, so ist $F^{n_0}x_0$ Fixpunkt und x_n konvergiert dagegen. OBdA sei also stets $x_{n+1} \neq x_n$. Dann ist $(d(x_n, x_{n+1}))_n$ eine fallende Folge, da $d(x_{n+1}, x_n) < d(x_n, x_{n-1})$ nach Voraussetzung. Sie ist nach unten durch 0 beschränkt, konvergiert also gegen ein $\alpha \in \mathbb{R}$.
Da der zu Grunde gelegte metrische Raum vollständig ist, gibt es ein $z \in X$ und eine Teilfolge, sodass $F^{n_k}x_0 \to z$.
Angenommen, $z \neq Fz$.
Dann ist

$$\begin{gathered}
\alpha = \lim_{n\to\infty} d(F^{n+1}x_0, F^n x_0) = \lim_{k\to\infty} d(F^{n_k+1}x_0, F^{n_k}x_0) = \\
d(Fz, z) > d(F^2 z, Fz) = \\
\lim_{k\to\infty} d(F^{n_k+2}x_0, F^{n_k+1}x_0) = \lim_{n\to\infty} d(F^{n+2}x_0, F^{n+1}x_0) = \alpha \quad ↯.
\end{gathered}$$

Es konvergiert auch $F^n x_0 \to z$ (nicht nur $F^{n_k}x_0$): Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $k := \max\{k \in \mathbb{N}; n_k < n\}$. Dann ist $d(F^n x_0, z) = d(F^{n-n_k}F^{n_k}x_0, F^{n-n_k}z) < d(F^{n_k}x_0, z)$. Daher ist $\lim_{n\to\infty} d(F^n x_0 z) \leq \lim_{k\to\infty} d(F^{n_k}x_0, z) = 0$, also $F^n x_0 \to z$.

c) Seien x, y Fixpunkte. Dann ist $d(x, y) = d(F(x), F(y)) \leq kd(x, x) + kd(y, y) = 0$, also $x = y$.
Für $l \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned}
&d(F^l x, F^{l+1}x) \leq kd(F^{l-1}x, F^l x) + kd(F^l x, F^{l+1}x) \\
\Rightarrow &d(F^l x, F^{l+1}x) \leq \frac{k}{1-k} d(F^{l-1}x, F^l x) \leq \ldots \leq (\frac{k}{1-k})^l d(x, Fx).
\end{aligned}$$

Da $k < \frac{1}{2}$, ist hierin auch $\frac{k}{1-k} < 1$.
Für $m > n$ ist dann

$$d(F^m x, F^n x) \leq \sum_{l=n}^{m} \left(\frac{k}{1-k}\right)^l d(x, Fx) \to 0$$

für $n, m \to \infty$, also $F^n x$ Cauchyfolge. Wegen der Vollständigkeit von X hat sie einen Grenzwert, $F^n x \to z$. Dass dieses z nicht von x abhängt, sehen wir daran, dass jeder derartige Grenzwert ein Fixpunkt ist (wie wir gleich zeigen werden), und an der Eindeutigkeit des Fixpunkts von F.

$$d(z, Fz) = \lim_{n\to\infty} d(F^n x, F^{n+1}x) \leq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{k}{1-k}\right)^n d(x, Fx) = 0.$$

Hausaufgabe 3:

Für eine Teilmenge A eines metrischen Raums (X, d) und $x \in X$ definieren wir den *Durchmesser von A* und den *Abstand zwischen x und A* durch

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{x,y\in A} d(x, y) \qquad \text{bzw.} \qquad \operatorname{dist}(x, A) = \inf_{y\in A} d(x, y).$$

Beweise:

a) X ist genau dann vollständig, wenn jede fallende Folge nichtleerer, abgeschlossener Teilmengen A_k mit

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{diam}(A_k) = 0$$

genau ein Element von X enthält, d. h.

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{x\}.$$

b) Ist A abgeschlossen, so gilt $\mathrm{dist}(x, A) > 0,$ falls $x \notin A$.

c) Ist A kompakt, so wird das Infimum in der Definition des Abstands tatsächlich angenommen.

Lösung:

a) Sei X vollständig und $(A_k)_k$ eine Mengenfolge mit den beschriebenen Eigenschaften. Sei $a_k \in A_k$ für jedes k. Diese a_k bilden wegen $\mathrm{diam}(A_k) \to 0$ eine Cauchyfolge. Sie hat einen Grenzwert x (Vollständigkeit), der (Abgeschlossenheit der A_k) in jedem A_k liegt, also im Schnitt. Es gibt keinen zweiten Punkt y im Durchschnitt, da sonst $\mathrm{diam}(A_k) \geq d(x, y) > 0$ wäre, im Widerspruch zur Konvergenz der Durchmesser gegen null.
Sei X nicht vollständig. Dann gibt es eine nicht konvergente Cauchyfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Es sei $A_k = \{x_i; x \geq k\}$. Diese Mengen sind ineinander enthalten und wegen der Cauchyeigenschaft konvergiert ihr Durchmesser gegen null. Sie sind abgeschlossen. (Jede konvergente Folge in A_k konvergiert gegen eines der x_i oder gegen einen Häufungspunkt der Cauchyfolge. Sie hat aber keinen, denn sonst wäre sie konvergent.) Gäbe es nun ein $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$, so wäre es ein Häufungspunkt der Cauchyfolge und damit auch ihr Grenzwert. Deshalb ist in diesem Fall der Schnitt leer.

b) Ist $\mathrm{dist}(x, A) = 0$, so gibt es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ mit $d(a_n, x) \to 0$ für $n \to \infty$ (nach Definition des Abstands und des Infimums). Das bedeutet aber, dass $a_n \to x$. Wegen der Abgeschlossenheit liegt der Grenzwert einer Folge in A aber wieder in A, also $x \in A$. Aus $x \notin A$ folgt daher $\mathrm{dist}(x, A) > 0$.

c) Sei $d = \mathrm{dist}(x, A)$. Dann gibt es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A mit $d(x, a_n) \to d$. Diese hat (wegen der Kompaktheit) eine konvergente Teilfolge $a_{n_k} \to a \in A$. Es ist dann $d(a, x) = \lim_{k\to\infty} d(a_{n_k}, x) = d$.

Hausaufgabe 4:

Zeige den folgenden Satz: Die Funktion $f(x, y)\colon R \to \mathbb{R}$ sei stetig auf $R = \{(x, y); |x - x_0| \leq a, \|y - y_0\| \leq b\}$ mit $x_0 \in \mathbb{R}, a, b > 0$ und sei bezüglich y Lipschitz-stetig. Dann hat das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = y_0$$

genau eine auf $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ für ein $\alpha > 0$ definierte Lösung y.
Formuliere und löse auch eine Aufgabe, in der du diesen Satz anwendest.

Lösung:
Wir suchen nach einer Funktion y, die

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\ \mathrm{d}t =: Ty(x)$$

erfüllt. Dabei betrachten wir T als Abbildung auf dem Raum der stetigen Funktionen mit Supremumsnorm. Wenn wir eine stetige Funktion gefunden haben, die diese Gleichung erfüllt, ist sie auch differenzierbar. (Denn die rechte Seite, die mit dem Integral, ist differenzierbar wegen der Stetigkeit von f.) Wir untersuchen T auf die Kontraktionseigenschaft: y und z seien stetige Funktionen mit $y(x_0) = z(x_0)$ und Werten, die man in f einsetzen kann. Der metrische Raum, den wir nutzen wollen, ist also $\{y \in C([x_0 - a, x_0 + a]), \|y - y_0\|_\infty \leq b; y(x_0) = 0\}$. Auch diese Menge ist in der von der Supremumsnorm induzierten Topologie vollständig (als abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes).

$$\|Ty - Tz\| \leq |y(x_0) - z(x_0)| + \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t)) - f(t, z(t))|\ \mathrm{d}t \leq \int_{x_0}^{x} L|y(t) - z(t)|\ \mathrm{d}t \leq |x - x_0| L\|y - z\| \leq \alpha L\|y - z\|.$$

Für $\alpha < \frac{1}{L}$ ist also T k-kontraktiv und hat nach dem BFPS einen eindeutigen Fixpunkt.

Der Fachschaftsrat lädt euch ein zum

SPIELEABEND

am **Donnerstag, dem 2. Mai 2013, ab 18:03 Uhr** im LuDi und in der Fachschaft.
Für Knabbereien und eine kleine Sammlung an Brett- und Kartenspielen werden wir sorgen. Getränke sowie eigene Spiele könnt ihr gerne selbst mitbringen. Wir freuen uns auf euch!
Euer Fachschaftsrat Mathematik