FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

3.5.2013

# Lösungsvorschlag zu den Hausaufgaben der 4. Übung

**Hausaufgabe 1:**

Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie von Funktionen auf $[0,1]$, deren Supremum jeweils durch $C$ beschränkt sei. Zu jedem $f \in \mathcal{F}$ definiere $F_f(x) = \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$. Zeige: Jede Folge in der Menge $\{F_f; f \in \mathcal{F}\}$ enthält eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.

**Lösung:**

Arzela-Ascoli. Definitionsbereich ist kompakt, jedes $F_f$ ist Lipschitz-stetig mit Konstante $C$, also ist die Familie gleichgradig stetig. Punktweise Beschränktheit ergibt sich daraus auch sofort.

**Hausaufgabe 2:**

Ist die Einheitskugel des Raumes $l^2$ kompakt? Ist sie relativkompakt?

**Lösung:**

Nein. Betrachte die Folge der Einheitsvektoren $e_i$. ($e_i$: Folge aus ausschließlich Nullen und einer Eins an $i$ter Stelle.) Beliebige zwei verschiedene Folgenglieder haben jeweils einen festen, gleichen Abstand. Keine Teilfolge ist also konvergent.

**Hausaufgabe 3:**

Beweise oder widerlege:

a) Kompakte Mengen sind beschränkt.

b) Kompakte Mengen sind vollständig.

**Lösung:**

a) Die offene Überdeckung mit Kugeln vom Radius 1 enthält eine endliche Teilüberdeckung.

b) Sei $x_n$ eine Cauchyfolge in einer kompakten Menge. Sie enthält eine konvergente Teilfolge (wegen der Kompaktheit) und ist daher konvergent.

**Hausaufgabe 4:**

Für $0 < \alpha \leq 1$ sei der Raum der auf $[0,1]$ zum Exponenten $\alpha$ Hölder-stetigen Funktionen definiert durch

$$C^{0,\alpha}([0,1]) := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid |f|_{0,\alpha} < \infty\},$$

wobei

$$|f|_{0,\alpha} = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Zeige:

*a.)* Eine Funktion $f \in C^{0,\alpha}([0,1])$ ist genau dann konstant, wenn $|f|_{0,\alpha} = 0$.

*b.)* Für $f \in C^{0,\alpha}([0,1])$ sei
$$\|f\|_{0,\alpha} := |f(0)| + |f|_{0,\alpha}.$$
Dann ist $\|\cdot\|_{0,\alpha}$ eine Norm auf $C^{0,\alpha}([0,1])$.

*c.)* Es gilt $C^{0,\alpha}([0,1]) \subset C([0,1])$ und $\|f\|_\infty \leq \|f\|_{0,\alpha}$ für alle $f \in C^{0,\alpha}([0,1])$.

*d.)* $(C^{0,\alpha}([0,1]), \|\cdot\|_{0,\alpha})$ ist ein Banachraum.

*e.)* Die Menge
$$B_{0,\alpha} := \{f \in C^{0,\alpha}([0,1]) \mid \|f\|_{0,\alpha} \leq 1\}$$
ist relativ kompakt in $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

*f.)* Warum betrachten wir nicht $C^{0,\alpha}([0,1])$ für $\alpha > 1$?

**Lösung:**
$0 < \alpha \leq 1$, $C^{0,\alpha}([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} | |f|_{0,\alpha} < \infty\}$, $|f|_{0,\alpha} = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$.

a) $f \in C^{0,\alpha}([0,1])$ konstant $\iff |f|_{0,\alpha} = 0$.
Sei $f$ konstant, d.h. $\forall x, y \in [0,1] : f(x) = f(y)$. Dann ist $|f|_{0,\alpha} = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} = \sup_{x \neq y} \frac{0}{|x-y|^\alpha} = 0$.
Sei umgekehrt $|f|_{0,\alpha} = 0$. Mit $x_0, y_0 \in [0,1]$ ist dann $0 \leq \frac{|f(x_0)-f(y_0)|}{|x_0-y_0|^\alpha} \leq \sup_{x \neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} = 0$, also $|f(x_0) - f(y_0)| = 0$ und somit $f$ konstant.

b) $\|f\|_{0,\alpha} = |f(0)| + |f|_{0,\alpha}$ definiert eine Norm auf $C^{0,\alpha}([0,1])$.
Für $\lambda \in \mathbb{R}, f, g \in C^{0,\alpha}([0,1])$ gilt:
$$\|f\|_{0,\alpha} = 0 \iff |f|_{0,\alpha} = 0 \land |f(0)| = 0 \iff f = const \land f(0) = 0 \iff f \equiv 0$$
sowie
$$\begin{aligned}\|\lambda f\|_{0,\alpha} &= |\lambda f(0)| + \sup_{x \neq y} \frac{|\lambda f(x) - \lambda f(y)|}{|x-y|^\alpha} \\ &= |\lambda||f(0)| + |\lambda| \sup_{x \neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} = |\lambda|\|f\|_{0,\alpha}\end{aligned}$$
und schließlich
$$\begin{aligned}\|f+g\|_{0,\alpha} &= |f(0)+g(0)| + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x)-f(y)+g(x)-g(y)|}{|x-y|^\alpha} \\ &\leq |f(0)| + |g(0)| + \sup_{x \neq y}\left(\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} + \frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|^\alpha}\right) \\ &\leq |f(0)| + |g(0)| + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} + \sup_{x \neq y} \frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|^\alpha} \\ &= \|f\|_{0,\alpha} + \|g\|_{0,\alpha}.\end{aligned}$$

Sei $f \in C^{0,\alpha}([0,1])$. Dann ist $f \in C([0,1])$.
Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta = (\frac{\varepsilon}{|f|_{0,\alpha}})^{\frac{1}{\alpha}}$. Dann folgt für $x, y \in [0,1]$ mit $|x-y| < \delta$:
$$|f(x)-f(y)| \leq |f|_{0,\alpha}|x-y|^\alpha < |f|_{0,\alpha}\delta^\alpha = |f|_{0,\alpha}\frac{\varepsilon}{|f|_{0,\alpha}} = \varepsilon$$
.
Für $x \neq y \in [0,1]$ ist $|x-y| < 1$ und damit $\frac{1}{|x-y|^\alpha} > 1$. Daher ist
$$\begin{aligned}\|f\|_\infty &= \sup_{y \in [0,1]} |f(y)| \\ &\leq \sup_{y \in [0,1]} \frac{|f(y)-f(0)|}{1} + |f(0)| \\ &\leq \sup_{x \neq y} \frac{|f(y)-f(x)|}{|x-y|^\alpha} + |f(0)| = \|f\|_{0,\alpha}.\end{aligned}$$

d) $(C^{0,\alpha}([0,1]), \|\cdot\|_{0,\alpha})$ ist ein Banachraum.
Sei $(f_n)_{\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $C^{0,\alpha}([0,1])$.
Dann ist wegen $\|f_n - f_m\|_\infty \leq \|f_n - f_m\|_{0,\alpha}$ (nach c) $(f_n)_{\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $C([0,1])$, also gleichmäßig (und punktweise) konvergent, der Grenzwert sei $f$.
Zu zeigen ist $f \in C^{0,\alpha}([0,1])$, also $|f|_{0,\alpha} < \infty$. In derselben Rechnung sieht man auch, dass $|f_n - f|_{0,\alpha} \to 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Da Cauchyfolgen beschränkt sind, $\exists C > 0 \forall \in \mathbb{N}: \ |f_n|_{0,\alpha} < C$. Sei $n$ so groß, dass $|f_n - f_m| < \varepsilon \forall m \geq n$.

$$\begin{aligned}
|f|_{0,\alpha} &\leq |f - f_n|_{0,\alpha} + |f_n|_{0,\alpha} \\
&= \sup_{x\neq y} \lim_{m\to\infty} \frac{|f_m(x) - f_n(x) - f_m(y) + f_n(y)}{|x-y|^\alpha} + |f_n|_{0,\alpha} \\
&\leq \sup_{x\neq y} \lim_{m\to\infty} \sup_{x\neq y} \frac{|f_m(x) - f_n(x) - f_m(y) + f_n(y)}{|x-y|^\alpha} + |f_n|_{0,\alpha} \\
&= \sup_{x\neq y} \lim_{m\to\infty} |f_m - f_n|_{0,\alpha} + |f_n|_{0,\alpha} \\
&= \lim_{m\to\infty} |f_m - f_n|_{0,\alpha} + |f_n|_{0,\alpha} \\
&\leq \varepsilon + C < \infty.
\end{aligned}$$

Also konvergiert jede Cauchyfolge in $C^{0,\alpha}([0,1])$ gegen ein $f \in C^{0,\alpha}([0,1])$.

e) $B_{0,\alpha} = \{f \in C^{0,\alpha}([0,1]) : \|f\|_{0,\alpha} \leq 1\}$ ist relativ kompakt in $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.
Wegen $\|f\|_\infty \leq \|f\|_{0,\alpha} \leq 1$, ist $\sup_{f\in B_{0,\alpha}} |f(x)| \leq 1$ für jedes $x \in [0,1]$.
Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta = \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}$.
Sei $f \in B_{0,\alpha}$, seien $x, y \in [0,1]$ mit $0 < |x-y| < \delta$.
Dann ist $|f(x) - f(y)| \leq \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}|x-y|^\alpha \leq \|f\|_{0,\alpha}\delta^\alpha \leq 1\varepsilon$, also sind die Funktionen aus $B_{0,\alpha}$ gleichgradig gleichmäßig stetig.
Mit dem Satz von Arzela-Ascoli folgt jetzt die relative Kompaktheit von $B_{0,\alpha}$ in $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.
f) Alle Funktionen in diesen Räumen sind konstant. (Man kann leicht nachrechnen, dass sie Ableitung 0 haben.)

**Hausaufgabe 5:**
Wir definieren für $p \geq 1$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\|u\|_{1,p} = \left(\int_\Omega |u|^p + \int_\Omega |u'|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Zeige

a) Dieser Ausdruck definiert eine Norm auf dem Schnitt der Menge $C^1(\Omega)$ der stetig differenzierbaren Funktionen mit $L^p(\Omega)$.

b) Bestimme die Vervollständigung von $C^1(\Omega)$ bezüglich dieser Norm und zeige, dass sie mit der Menge $W^{1,p}(\Omega)$ derjenigen $L^p$-Funktionen $u$ übereinstimmt, zu denen eine $L^p$-Funktion $v$ existiert, sodass für alle $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ gilt: $\int_\Omega \varphi' u = -\int_\Omega \varphi v$.

**Lösung:**

a) Definitheit, Multiplikativität klar. Dreiecksungleichung folgt aus der Dreiecksungleichung für $L^p$-Norm und $p$-Norm des $\mathbb{R}^2$.

b) Liegt $u$ in $W^{1,p}(\Omega)$, so approximieren wir $u$ wie in der Präsenzaufgabe durch Faltung mit dem Glättungskern. Das liefert tatsächlich eine Approximation in der gegebenen Norm.
Liegt umgekehrt $u$ in der Vervollständigung von $C^1$, so existiert eine $\|\cdot\|_{1,p}$-Cauchyfolge $u_n$ in $C^1$, die $u$ approximiert. Dann gilt insbesondere, dass $u_n$ und $u_n'$ $\|\cdot\|_{L^p}$-Cauchyfolgen stetiger Funktionen sind. Es existieren also jeweils Grenzwerte $u$ bzw. $v$ in $L^p$. Wir müssen noch die Integralidentität zeigen: Sei $\varphi \in C^\infty(\Omega)$. Dann

$$\int_\Omega \varphi' u \leftarrow \int_\Omega \varphi' u_n = \int_\Omega \varphi u_n' \to -\int_\Omega \varphi v,$$

denn für die approximierenden Funktionen können wir partiell integrieren. Die Konvergenz (hier am Beispiel des ersten Integrals) sieht man wie folgt: $\varphi'$ ist eine Funktion mit kompaktem, also insbesondere beschränktem Träger $K$ und als stetige Funktion auf einem Kompaktum beschränkt durch eine Konstante $C$.

$$|\int_\Omega \varphi' u - \int_\Omega \varphi' u_n| \leq C \int_K |u - u_n| \leq \widetilde{C} \left( \int_K |u - u_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \to 0.$$

Für die zweite Ungleichung haben wir hierbei die Höldersche Ungleichung verwendet.