FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

16.5.2013

Lösungsvorschlag zu den Hausaufgaben der 6. Übung

Hausaufgabe 1:
Es sei $p \geq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und U ein abgeschlossener Untervektorraum von $W^{1,p}(\Omega)$.
Sei $A\colon W^{1,p}(\Omega) \to U$ ein stetiger linearer Operator mit Operatornorm 42. Betrachte

$$T\colon f \mapsto Af - 100f$$

und zeige, dass T ein invertierbarer linearer stetiger Operator ist.

Lösung:
Linearität und Stetigkeit sind klar, da T Summe stetiger linearer Operatoren ist. Es ist

$$Tf = -100(I - \frac{1}{100}A)f$$

und $\frac{1}{100}A$ hat eine Norm kleiner als 1 (nämlich $\frac{42}{100}$). Damit ist dieser Operator $I - \frac{1}{100}A$ invertierbar (Satz über die Neumannsche Reihe) und daher auch T.

Hausaufgabe 2:
Es sei K kompakt und $T\colon C(K) \to C(K)$ linear und positiv (soll heißen: $f \geq 0$ (auf K) impliziert auch $Tf \geq 0$).
Zeige: Dann ist T stetig mit Norm $T(x \mapsto 1)$.

Lösung:
Sei $e(x) = 1$ für alle $x \in K$. Sei $f \in C(K)$ eine Funktion mit Norm 1. Dann ist $-e(x) \leq f(x) \leq e(x)$ für alle $x \in K$ (nach Definition der Supremumsnorm). Also ist $e - f$ ebenso positiv wie $f - (-e)$ und daher $T(e - f) \geq 0$ und $T(f + e) \geq 0$, d.h.

$$Te = Tf + T(e - f) \geq Tf + 0 \qquad \text{und} \qquad Te = T(f + e) - Tf \geq -Tf.$$

Insgesamt ist also $|Te(x)| \geq |Tf(x)|$. Also ist

$$\|T\| = \sup_{\|f\|=1} \|Tf\| = \|Te\|,$$

insbesondere ist T stetig.

Hausaufgabe 3:
Operatoren heißen **kompakt**, wenn sie stetig sind und beschränkte Mengen in relativkompakte Mengen abbilden.
Zeige:

$$U\colon C([0,1]) \to C([0,1])$$
$$Uf(x) = \int_0^1 e^{tx} f(t)\, \mathrm{d}t$$

ist kompakt.

Lösung:
Sei $\mathcal{F}$ eine in $C([0,1])$ beschränkte Menge von Funktionen. (Die Schranke für die Norm sei C.) Dann ist für beliebiges x die Menge $\{Uf(x); f \in \mathcal{F}\}$ beschränkt und damit relativkompakt in $\mathbb{R}$, denn

$$|Uf(x)| = |\int_0^1 e^{tx} f(t) \text{ d}t| \leq C \int_0^1 e^{tx} \text{ d}t = C\frac{1}{x}(e^x - 1).$$

Außerdem ist $\{Uf; f \in \mathcal{F}\}$ gleichgradig stetig:

$$|Uf(x) - Uf(y)| = |\int_0^1 (e^{tx} - e^{ty}) f(t) \text{ d}t| \leq C \int_0^1 te^{t\xi(x,y)}|x-y| \text{ d}t \leq Ce|x-y|$$

mit $\xi(x,y) \in (x,y) \cup (y,x)$ (Mittelwertsatz...).
Nach dem Satz von Arzela-Ascoli ist daher $U\mathcal{F}$ relativkompakt. Das war zu zeigen.

Hausaufgabe 4:

Es gilt folgdender Satz[1]: A sei ein surjektiver stetiger linearer Operator des Banachraums X in den Banachraum Y. Dann ist A offen, d.h. A bildet offene Mengen in offene Mengen ab.
Was hat dieser Satz mit Satz 2.7 (Skript, S.40) zu tun?

Lösung:
A ist in diesem Satz („über den inversen Operator“) invertierbar, also insbesondere surjektiv. Stetigkeit von A^{-1} bedeutet, dass die Urbilder offener Mengen unter A^{-1} (also die Bilder offener Mengen unter A) offen sind. Das liefert aber gerade der oben genannte Satz von der offenen Abbildung.

Hausaufgabe 5:
Sei X ein Banachraum und $A \in L(X)$. Man definiert den sog. Spektralradius von A durch

$$r(A) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

Beweise die folgenden Aussagen[2]:

a.) $r(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\|A^n\|}$.

b.) Ist $r(A) < 1$, so ist der Operator $(I - A)$ invertierbar und es gilt $(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$.

c.) Konvergiert die Neumannsche Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$, so gilt $r(A) < 1$.

Lösung:
X sei Banachraum, $A \in L(X)$, $r(A) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$.
a) OBdA sei $A^k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. (Sonst ist die Behauptung ohnehin sofort klar, da aus $A^n = 0$ auch $A^m = 0$ für alle $m > n$ und damit $r(A) = 0 = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{0} = 0 = \inf_{\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\|A^n\|}$ folgt.)
Sei $\varepsilon > 0$ und bezeichne $I := \inf_{k\in\mathbb{N}} \sqrt[k]{\|A^k\|}$. Dann existiert nach der Definition des Infimums ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[n]{\|A^n\|} < I + \frac{\varepsilon}{2}$. Sei $N_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass mit

$$x := \max\{\|A^k\| | k \in \{0, ..., n-1\}\}$$

dann für alle $m \geq N_0$

$$\sqrt[m]{x} \leq \frac{I + \varepsilon}{I + \frac{\varepsilon}{2}} > 1$$

[1] Der hier als gegeben angenommen werden darf und im Verlauf des Semesters hoffentlich noch bewiesen werden wird.
[2] Greife dabei gerne auf folgend skizzierten Tipp zurück: $I = \inf$, $\sqrt[n]{\|A^n\|} < I + \frac{\varepsilon}{2}$, $x := \max\{\|A^k\|; k < n\}$, $\sqrt[m]{x} \leq \frac{I+\varepsilon}{I+\frac{\varepsilon}{2}}$ für $m > N_0$. $k = m - \lfloor \frac{m}{n} \rfloor$ für $m > N_0, n$; $\sqrt[m]{\|A^m\|} \leq \ldots \leq I + \varepsilon$.

erfüllt ist. Das ist möglich, da für $m \to \infty$ die Folge $(\sqrt[m]{x})_m$ gegen 1 konvergiert. Für $m > \max\{N_0, n\}$ ist dann unter Berücksichtigung von $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ und mit $k = m - [\frac{m}{n}] \cdot n \in \{0, ..., n-1\}$

$$\begin{aligned}
\sqrt[m]{\|A^m\|} &\leq \|A^n\|^{[\frac{m}{n}]\frac{1}{m}} \|A^{m-[\frac{m}{n}]\cdot n}\|^{\frac{1}{m}} \\
&\leq (I + \frac{\varepsilon}{2})^{n[\frac{m}{n}]\frac{1}{m}} \|A^k\|^{\frac{1}{m}} \\
&\leq (I + \frac{\varepsilon}{2})^{[\frac{m}{n}]\frac{n}{m}} \sqrt[m]{x} \\
&\leq (I + \frac{\varepsilon}{2})^1 \cdot \frac{I + \varepsilon}{I + \frac{\varepsilon}{2}} \\
&= I + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Da dies wegen $\sqrt[m]{\|A^m\|} \geq I \ \forall m \in \mathbb{N}$ gleichbedeutend ist mit $\sqrt[n]{\|A^n\|} \to I$ für $n \to \infty$, folgt

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \inf_{\in \mathbb{N}} \sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

b) Sei $r(A) < 1$. Dann existiert $\sum_{N=1}^{\infty} A^n$, denn $L(X)$ ist Banachraum und $(\sum_{N=1}^{\infty} A^n)_{N\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge, da $\|\sum_{k=n}^{m} A^k\| \leq \sum_{k=n}^{m} \|A^k\|$ und $\sum_{N=k}^{\infty} \|A^k\|$ konvergent nach Wurzelkriterium: $\limsup \sqrt[n]{\|A^n\|} = r(A) < 1$.
Da I und A sowie A und A kommutieren, ist $(I - A)\sum_{n=1}^{\infty} A^n = (\sum_{n=1}^{\infty} A^n)(I - A)$ und

$$(I - A)\sum_{n=0}^{N} A^n = I - A^{N+1} \to I,$$

da (immerhin ist $\sum_{N=1}^{\infty} \|A^N\| < \infty$) $\|A^{N+1}\| \to 0$ für $N \to \infty$, damit schließlich

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} A^n.$$

c) Die Reihe $\sum_{N=1}^{\infty} A^n$ konvergiere. Dann gilt $r(A) < 1$.
Denn aus der Konvergenz der Reihe folgt insbesondere ihre Cauchyfolgeneigenschaft, die wiederum zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ die Existenz von $N_0 \in \mathbb{N}$ sichert, sodass für alle größeren $\in \mathbb{N}$

$$\|A^n\| = \|\sum_{k=n}^{n} A^k\| < \varepsilon.$$

Insbesondere existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $\|A^N\| < \frac{1}{2}$, also $\sqrt[N]{\|A^N\|} < (\frac{1}{2})^{\frac{1}{N}} < 1$. Da nun aber nach a)

$$r(A) = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sqrt[k]{\|A^k\|} \leq \sqrt[N]{\|A^N\|} < 1,$$

folgt damit schon $r(A) < 1$.