FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

23.5.2013

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Lösungsvorschlag zu den Hausaufgaben der 7. Übung

Hausaufgabe 1:

a) Zeige: Die Resolventenmenge eines Operators A ist offen. Dabei versteht man unter der Resolventenmenge $\rho(A)$ die Menge
$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{K}; \quad (\lambda I - A) \text{ hat ein stetiges Inverses}\}.$$

b) Zeige: Ist $|\lambda| > r(A) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$, so ist $\lambda \in \rho(A)$.

c) Das Komplement der Resolventenmenge heißt „Spektrum von A" und wird mit $\sigma(A)$ bezeichnet. Was können wir über $\sigma(A)$ aussagen?
(Und was hat dieses Spektrum mit dem aus LinA bekannten Spektrum zu tun?)

Lösung:

a) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\mu \in \rho(A)$. Dann ist
$$\lambda I - A = \mu I - A + (\lambda - \mu)I = (I - (\mu - \lambda)\underbrace{(\mu I - A)^{-1}}_{:=R(\mu,A)})(\mu I - A)$$
(Man nennt $R(\mu, A)$ die *Resolvente* von A an der Stelle μ). Falls nun $|\lambda - \mu| \leq 1/\|R(\mu, A)\|$, ist der Operator $(I - (\mu - \lambda)R(\mu, A))$ stetig invertierbar, da die Neumannsche Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n \Big[R(\mu, A)\Big]^n$$
konvergiert. Folglich ist $\lambda I - A$ für $\lambda \in B_{1/\|R(\mu,A)\|}(\mu)$ als Produkt stetig invertierbarer Operatoren stetig invertierbar und somit $\rho(A)$ offen.

b) Sei $B := \lambda^{-1}A$. Dann ist
$$r(y) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|\lambda^{-n}A^n\|} = \frac{1}{|\lambda|}\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \frac{1}{|\lambda|} r(A)$$
und für $r(A) < |\lambda|$ daher $r(B) < 1$. Also ist B nach Blatt 6, Hausaufgabe 5 $(I - B)$ stetig invertierbar. Folglich ist auch $(\lambda I - A) = \lambda(I - B)$ stetig invertierbar und somit $\lambda \in \rho(A)$.

c) Nach Aufgabenteil a) ist $\sigma(A)$ abgeschlossen und nach Aufgabenteil b) durch $r(A)$ beschränkt, also kompakt. Für eine lineare Abbildung $A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ ist das so definierte Spektrum mit dem Spektrum aus der linearen Algebra (=Menge der Eigenwerte des Operators A) identisch, denn $\lambda \in \sigma(A)$ genau dann wenn $(\lambda I - A)$ nicht invertierbar, also insbesondere nicht injektiv ist und daher
$$(\lambda I - A)v = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad Av = \lambda v \;\text{ für ein }\; v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}\,.$$

Hausaufgabe 2:

P, Q seien lineare Operatoren auf dem Banachraum X mit $PQ - QP = I$. Dann sind P und Q nicht beide stetig.
Hinweis: $PQ^n - Q^nP = \ldots$.

Lösung:
Zunächst zeigen wir mit vollständiger Induktion über n, dass

$$PQ^n - Q^nP = nQ^{n-1}. \tag{$*$}$$

Für $n = 1$ ist die Aussage klar und für $n \longrightarrow n+1$ beachte, dass

$$\begin{aligned} PQ^{n+1} - Q^{n+1}P &= PQ^{n+1} - Q^nPQ + Q^nPQ - Q^{n+1}P \\ &= (PQ^n - Q^nP)Q + Q^n(PQ - QP) \overset{IV}{=} nQ^{n-1}Q + Q^n = (n+1)Q^n. \end{aligned}$$

Wären nun beide P und Q stetig, so wäre nach $(*)$

$$n\|Q^{n-1}\| = \|PQ^n - Q^nP\| \leq 2 \cdot \|P\| \cdot \|Q\| \cdot \|Q^{n-1}\|$$

und daher $Q^{n-1} = 0$ für große n. Dann folgt wiederum aus $(*)$, dass $Q^m = 0$ auch für $0 \leq m \leq n-1$ und somit

$$0 = Q^0 = I,$$

ein Widerspruch!

Hausaufgabe 3:

a) Sei X Banachraum und M abgeschlossener Unterraum. Zeige: Dann muss es zu $x \in X$ nicht unbedingt ein Element bester Approximation in M geben. Orientiere dich beim Beweisen ruhig am Skript. (Hinter Satz 2.22) An welcher Stelle versagt der Beweis aus der Präsenzaufgabe?

b) Wofür haben wir im Beweis von Satz 2.21 die Unterraumeigenschaft von M verwendet? Welche Eigenschaft hätten wir stattdessen nehmen können?

Lösung:

a) Ein Gegenbeispiel findet man (wie in der Aufgabenstellung bemerkt) im Skript als Bemerkung zu Satz 2.22. Der Beweis der Präsenzaufgabe basiert im Wesentlichen auf der Auswahl einer konvergenten Teilfolge, deren Grenzwert im endlichdimensionalen Fall wieder in der Menge M liegt. Auf die endliche Dimension kommt es hier an, denn in einem unendlichdimensionalen M muss es keine konvergente Teilfolge geben. (Wenn man in einem sog. „reflexiven“ Banachraum arbeitet, kann man immerhin noch eine „schwach konvergente“ Teilfolge finden und mit dieser weitermachen.)

b) Im Beweis von Satz 2.21 haben wir die Unterraumeigenschaft von M benutzt, um die Existenz des Elements bester Approximation zu gewährleisten. Stattdessen hätten wir auch fordern können, dass M eine konvexe Teilmenge von X ist. Für die Eindeutigkeit muss man dann allerdings weiter argumentieren, denn in dem Beweis verwenden wir noch insbesondere die Abgeschlossenheit von M bezüglich Addition und Multiplikation mit (-1).

Hausaufgabe 4:

Sei X ein unendlichdimensionaler normierter Raum, sei $\delta > 0$. Zeige: Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\|x_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\|x_n - x_m\| > 1 - \delta$ für alle m, n.
Tipp: Suche zu schon gefundenen $x_k, k = 1, \ldots, n-1$ ein x_n, das „fast orthogonal“ auf dem von ihnen aufgespannten Unterraum steht, d.h. die Richtung eines Vektors, der beinahe benutzt werden kann, um den Abstand eines Punktes von diesem Unterraum zu messen.
Vergleiche mit der Situation im Hilbertraum.

Lösung:
Sei $\delta > 0$ vorgegeben. Wir konstruieren die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie folgt:
Zunächst wählen wir $x \in X$ beliebig und setzen

$$x_1 := \frac{x}{\|x\|}.$$

Sind nun $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bereits konstruiert, setzen wir $X_n := \operatorname{span}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (endlichdimensionaler und daher abgeschlossener Unterraum von X) und wählen ein $y \in X \setminus X_n$. Dann ist

$$d_n := \inf_{m\in X_n} \|y - m\| > 0$$

und es gibt ein $m_n \in X_n$ mit

$$\|y - m_n\| < \frac{d_n}{1-\delta}.$$

Setzen wir nun

$$x_{n+1} := \frac{y - m_n}{\|y - m_n\|},$$

so gilt für $u \in X_n$

$$\|x_{n+1} - u\| = \frac{1}{\|y - m_n\|} \Big\| y - \Big(m_n + \|y - m_n\| u \Big) \Big\| \geq \frac{d}{\|y - m_n\|} > 1 - \delta.$$