FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

29.5.2013

Lösungsvorschlag zu den Hausaufgaben der 8. Übung

Hausaufgabe 1:
Beweise den Satz über die Parallelogrammgleichung.

Lösung:
Sei H ein Prähilbertraum und $x, y \in H$. Dann gilt:

$$\|x+\alpha y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \overline{\alpha}\langle x,y\rangle + \alpha\overline{\langle x,y\rangle} + |\alpha|^2\langle y,y\rangle,$$
$$\|x-\alpha y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \langle x,x\rangle - \overline{\alpha}\langle x,y\rangle - \alpha\overline{\langle x,y\rangle} + |\alpha|^2\langle y,y\rangle$$

und somit

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle\right) = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right),$$

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\cdot\langle x,y\rangle, \qquad \text{für den Fall } \mathbb{K}=\mathbb{R}.$$

Im Fall $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{3} i^k\|x+i^k y\|^2 &= \|x+y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x-iy\|^2\\ &= 2\left(\langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle}\right) + 2i\left(\overline{i}\langle x,y\rangle + i\overline{\langle x,y\rangle}\right)\\ &= 2\left(\langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle}\right) + 2\left(\langle x,y\rangle - \overline{\langle x,y\rangle}\right) = 4\cdot\langle x,y\rangle\end{aligned}$$

Sei nun andersherum $(H, \|.\|)$ ein reeller normierter Raum in dem die Parallelogrammgleichung erfüllt ist. Dann wird H vermöge dem Skalarprodukt

$$\langle x,y\rangle := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right), \qquad x,y\in H$$

zu einem Prähilbertraum. Die Symmetrie folgt direkt aus der Definition und setzen wir $y=x$ erhalten wir sofort

$$\|x\| = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\|x+x\|^2 + \|x-x\|^2\right)} = \sqrt{\langle x,x\rangle},$$

also

$$\langle x,x\rangle \geq 0, \qquad \forall x\in H,$$

ebenso wie

$$\langle x,x\rangle = 0 \iff x=0.$$

Mit der Parallelogrammgleichung erhält man für $x_1, x_2, y \in H$:

$$\|x_1+x_2+y\|^2 = 2\|x_1+y\|^2 + 2\|x_2\|^2 - \|x_1+y-x_2\|^2$$
$$\|x_1+x_2+y\|^2 = 2\|x_2+y\|^2 + 2\|x_1\|^2 - \|x_2+y-x_1\|^2$$

und durch Addition der beiden Gelichungen:

$$\|x_1+x_2+y\|^2 = \|x_1+y\|^2 + \|x_2+y\| + \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 - \frac{1}{2}\left(\|x_1-x_2+y\|^2 + \|x_2-x_1+y\|^2\right).$$

Ersetzen wir y durch $-y$ erhalten wir:

$$\|x_1+x_2-y\|^2 = \|x_1-y\|^2 + \|x_2-y\| + \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 - \frac{1}{2}\left(\|x_1-x_2-y\|^2 + \|x_2-x_1-y\|^2\right).$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned}4 \cdot \langle x_1 + x_2, y\rangle &= \|x_1 + x_2 + y\|^2 - \|x_1 + x_2 - y\|^2 \\ &= \left(\|x_1 + y\|^2 + \|x_1 - y\|^2\right) + \left(\|x_2 + y\|^2 + \|x_2 - y\|^2\right) = 4 \cdot \langle x_1, y\rangle + 4 \cdot \langle x_2, y\rangle.\end{aligned}$$

Nach Konstruktion des Skalarprodukts gilt

$$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle, \qquad x, y \in H \tag{$*$}$$

für $\lambda = 0$ und $\lambda = -1$ und nach dem eben gezeigten auch für $\lambda \in \mathbb{N}$. Also gilt $(*)$ auch für $\lambda \in \mathbb{Z}$. Setzen wir $\lambda = \frac{m}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$ folgt

$$n\langle \lambda x, y\rangle = \langle n\lambda x, y\rangle = \langle mx, y\rangle = m\langle x, y\rangle$$

und daher $(*)$ auch für $\lambda \in \mathbb{Q}$. Aus der Stetigkeit der Norm folgt nun schließlich, die Behauptung für $\lambda \in \mathbb{R}$. Ist $(H, \|.\|)$ ein komplexer normierter Raum in dem die Parallelogrammgleichung erfüllt ist, so wird H durch

$$\langle x, y\rangle := \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|x + i^k y\|^2 = \frac{1}{4}\left[\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\Big(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2\Big)\right]$$

zu einem Prähilbertraum, da (wegen $|1 + i| = |1 - i| = 2$)

$$\|x\| = \sqrt{\frac{1}{4}\left[\|x + x\|^2 - \|x - x\|^2 + i\Big(\|x + ix\|^2 - \|x - ix\|^2\Big)\right]} = \sqrt{\langle x, x\rangle},$$

also

$$\langle x, x\rangle \geq 0, \qquad \forall x \in H,$$

und

$$\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$$

ist. Die Linearität des Skalarprodukts erhält man wie im reellen Fall in dem man sowohl den Real-, als auch den Imaginärteil analog zerlegt. Für die Symmetrie beachte:

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \frac{1}{4}\left[\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\Big(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2\Big)\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[\|y + x\|^2 - \|y - x\|^2 + i\Big(\|i(y - ix)\|^2 - \|-i(y + ix)\|^2\Big)\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[\|y + x\|^2 - \|y - x\|^2 - i\Big(\|y + ix\|^2 - \|y - ix\|^2\Big)\right] = \overline{\langle y, x\rangle}.\end{aligned}$$

Hausaufgabe 2:
Zeige: $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ ist kein Prähilbertraum.

Lösung:
Betrachte die Funktionen

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x - a\ ; & a \leq x \leq \dfrac{a+b}{2} \\ \dfrac{b-a}{2}\ ; & \dfrac{a+b}{2} < x \leq b \end{cases} \quad \text{und} \quad g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} \dfrac{a+b}{2} - x\ ; & a \leq x \leq \dfrac{a+b}{2} \\ 0\ ; & \dfrac{a+b}{2} < x \leq b \end{cases}.$$

Dann sind f und g stetige Funktionen und es gilt

$$\|f + g\|_\infty^2 = \frac{(b-a)^2}{4}, \quad \|f - g\|_\infty^2 = \frac{(b-a)^2}{4}, \quad \|f\|_\infty^2 = \frac{(b-a)^2}{4}, \quad \|g\|_\infty^2 = \frac{(b-a)^2}{4}.$$

Daher ist die Parallelogrammgleichung

$$\|f + g\|_\infty^2 + \|f - g\|_\infty^2 = 2\left(\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2\right)$$

verletztz und $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ kein Prähilbertraum.

Hausaufgabe 3:

Sei K eine lineare Abbildung auf dem Hilbertraum H mit $\langle Kf, g\rangle = \langle f, Kg\rangle$ für alle $f, g \in H$ und seien x, y Eigenvektoren von K zu unterschiedlichen Eigenwerten, also $Kx = \lambda x$, $Ky = \mu y$ für $\lambda \neq \mu$. Zeige: $x \perp y$.

Lösung:

Seien also $x, y \in H$ mit

$$Kx = \lambda x, \quad Ky = \mu y \quad \text{und} \quad \lambda \neq \mu,$$

dann ist

$$\lambda\langle x, x\rangle = \langle Kx, x\rangle = \langle x, Kx\rangle = \overline{\lambda}\langle x, x\rangle$$

und somit die Eigenwerte reell. Darüber hinaus ist

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle Kx, y\rangle = \langle x, Ky\rangle = \mu\langle x, y\rangle,$$

also $(\lambda - \mu)\langle x, y\rangle =$ und wegen $\lambda \neq \mu$

$$\langle x, y\rangle = 0.$$

Hausaufgabe 4:

Zeige: Über $\mathbb{R}$ gilt auch die „Umkehrung des Satzes von Pythagoras“: Gilt $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, so ist $x \perp y$. Wie ist das über $\mathbb{C}$?

Lösung:

Vorausgesetzt es gilt $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ für x und y aus einem reellen Prähilbertraum so ist:

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\| = \langle x + y, x + y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

und daher $\langle x, y\rangle = 0$. Bei einem komplexen Prähilbertraum gilt diese Aussage im Allgemeinen nicht. Nehmen wir zum Beispiel

$$x = i \quad \text{und} \quad y = 1$$

im (Prä-)Hilbertraum $\mathbb{C}$, so ist

$$2 = |1 + i|^2 = \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 = 1 + 1,$$

aber

$$\langle x, y\rangle = x \cdot y = i \neq 0.$$

Hausaufgabe 5:

Zeige mithilfe einer Aufgabe des letzten Blattes: Ein normierter Raum X ist genau dann endlichdimensional, wenn die (abgeschlossene) Einheitskugel kompakt ist.

Lösung:

Gehen wir zunächst davon aus, dass X endlichdimensional ist, so existiert eine Basis $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Dann definiert

$$T : \mathbb{K}^n \longrightarrow X,\ a \longmapsto \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$$

einen Isomorphismus zwischen X und $\mathbb{K}^n$, der wegen

$$\|T(a)\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \right\| \leq \|a\|_2 \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \|x\|^2 \right)^{1/2}$$

stetig ist. Sei nun $B \subset X$ die abgeschlossene Einheitskugel, so ist $T^{-1}(B)$ ebenfalls abgeschlossen und beschränkt, also nach dem *Satz von Heine-Borel* kompakt. Aus der Stetigkeit von T folgt dann auch, dass $B = T(T^{-1}(B))$ kompakt ist.

Sei nun andersherum die abgeschlossene Einheitskugel $B \subset X$ kompakt. Wäre nun X unendlichdimensional, so gäbe es nach Hausaufgabe 4 von Übungsblatt 7 eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\|x_n\| = 1$ (also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$) und

$$\|x_- x_m\| \geq \frac{1}{2}$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$. Diese Folge ist beschränkt, besitzt aber keine Cauchy- und erst recht keine konvergente Teilfolge. Widerspruch!

Hausaufgabe 6:

X sei der $\mathbb{C}$-Vektorraum aller Funktionen der Form $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\alpha_k t}$ (für ein $n \in \mathbb{N}$ und $c_k \in \mathbb{C}, \alpha_k \in \mathbb{R}$ für $k = 1, \dots, n$).

a) Zeige, dass die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle\colon X \times X \to \mathbb{C}$, die durch

$$\langle f, g \rangle = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{A} f(t)\overline{g(t)}\ \mathrm{d}t$$

gegeben ist, ein Skalarprodukt auf X definiert.

b) Zeige, dass für die von diesem Skalarprodukt induzierte Norm $\|\cdot\|$ gilt, dass $\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, falls sich $f \in X$ als $f = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\alpha_k t}$ (mit $\alpha_k \neq \alpha_j$ für $k \neq j$) darstellen lässt.

c) Sei $(c_k)_k \in l^2$ mit $c_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeige anhand der Folge $f_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{ikt}$, dass X nicht vollständig ist.

d) Sei H die Vervollständigung von X. Zeige: H ist ein nicht-separabler Hilbertraum.

Hinweis für diejenigen, die $\mathbb{C}$ nicht mögen: Ja, es ist $\int e^{it}\ dt = \frac{1}{i} e^{it}$.

Hinweis zu Teil d): Zeige: $t \mapsto e^{ist}$, $s \in \mathbb{R}$, ist Orthonormalsystem.

Lösung:

Wir überprüfen zunächst ob $\langle .,. \rangle$ wohldefiniert ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass

$$\lim_{A\to\infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{A} e^{i\alpha t} e^{-i\beta t}\, dt$$

für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ existiert. Für $\alpha = \beta$ ist

$$\lim_{A\to\infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{A} e^{i\alpha t} e^{-i\beta t}\, dt = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2A} \cdot 2A = 1$$

und für $\alpha \neq \beta$ gilt

$$\lim_{A\to\infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{A} e^{i\alpha t} e^{-i\beta t}\, dt = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2Ai(\alpha-\beta)} \left(e^{i(\alpha-\beta)A} - e^{-i(\alpha-\beta)A}\right) = \lim_{A\to\infty} \frac{\sin((\alpha-\beta)A)}{(\alpha-\beta)A} = 0,$$

das Produkt also wohldefiniert. Die Linearität und Symmetrie sind offensichtlich und für $f(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\alpha_k t}$ mit α_k paarweise verschieden erhalten wir

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k \overline{c_k} \langle e^{i\alpha_k t}, e^{i\alpha_k t} \rangle = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2,$$

also $\langle f, f \rangle \geq 0$ für alle $f \in X$. Ist $\langle f, f \rangle = 0$, so ist $|c_k|^2 = 0\ \ \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$ und daher

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\alpha_k t} = 0.$$

Also ist $\langle .,. \rangle$ ein Skalarprodukt und

$$\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq l_2,\ c_k \neq 0$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die zugehörige Folge mit

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{ikt}.$$

Dann ist

$$\|f_n - f_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} c_k e^{ikt} \right\| = \sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 < \infty$$

und somit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, die aber nicht konvergiert. Angenommen es gäbe ein $f(t) = \sum_{k=1^l} b_k e^{i\alpha_k t}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f$$

, dann wählen wir $M \in \mathbb{N}$ so, dass $\alpha_k \leq M$ für alle $k = 1, \ldots, l$. Für $n \geq M$ folgt:

$$(f_n - f)(t) = \sum_{k\neq M} a_k e^{i\beta_k t} + c_M e^{iMt},$$

wobei die Koeffizienten β_k paarweise verschieden sind und $\beta_k \neq M$ für alle $k \in \mathbb{N}$ (nur endlich viele der a_k sind von null verschieden). Dann ist

$$\|f_n - f\|^2 = \sum_{k\neq M} |a_k|^2 + |c_M|^2 \geq |c_M|^2,$$

also $\|f_n - f\| \geq |c_M| > 0$ für alle $n \geq M$ im Widersrpuch zu unserer Annahme.

Zu guter Letzt sei $(H, \langle .,. \rangle)$ der Hilbertraum der durch Vervollständigung des Raumes X entsteht. Für $s \in \mathbb{R}$ betrachte die Funktion $f_s \in X$ mit $f_s(t) = e^{ist}$. Dann ist $\|f_s\| = 1$ und $\langle f_s, f_u \rangle = 0$ für $s \neq u$. Daher ist $(f_s)_{s\in\mathbb{R}} \subseteq H$ orthonormal und überabzählbar. Darüber hinaus gilt für $s \neq u$

$$\|f_u - f_s\|^2 = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{A} \left(e^{ist} - e^{iut}\right)\left(e^{-ist} - e^{-iut}\right) dt = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{A} \left(2 - e^{iut}e^{-ist} - e^{ist}e^{-iut}\right) dt = 2,$$

also $\|f_u - f_s\| = \sqrt{2} := \delta$. Nehmen wir nun an, dass H separabel ist, so gibt es eine abzählbar dichte Teilmenge

$$\mathcal{H} := \{\, f_n \,:\, n \in \mathbb{N} \,\} \subseteq H$$

. Folglich ist für jedes $f \in H$

$$B_{\delta/2}(f) \cup \mathcal{H} \neq \emptyset,$$

d. h. es existiert ein $f_n \in \mathcal{H}$ mit $\|f_n - f\| < \delta/2$. Sei

$$n_f := \min\{\, n \in \mathbb{N} \,:\, \|f_n - f\| < \delta/2 \,\}$$

und definiere $\mathcal{F} : H \longrightarrow \mathbb{N}$ durch $f \longmapsto n_f$. Diese Abbildung ist injektiv, denn sind $f, g \in H$ mit $f \neq g$ und $\mathcal{F}(f) = n_f = n_g = \mathcal{F}(g)$, so ist $\|f_{n_f} - f\| < \delta/2$, $\|g - f_{n_g}\| < \delta/2$ und daher

$$\|f - g\| \leq \|g - f_{n_g}\| + \|f_{n_f} - f\| < \delta$$

im Widerspruch zu unseren bisherigen Ergebnissen. Also ist $\mathcal{F}$ tatsächlich injektiv. Dann hat H die gleiche Mächtigkeit wie $\mathcal{F}(H) \subseteq \mathbb{N}$ und ist daher insbesondere abzählbar. Ein Widerspruch! Also ist H nicht separabel.