FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

6.6.2013

Lösungsvorschlag zu den Hausaufgaben der 9. Übung

Hausaufgabe 1:

Ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge orthonormaler Vektoren im Hilbertraum H, so streben für jedes $x \in H$ die Fourierkoeffizienten $\langle x, u_n\rangle$ gegen 0.

Lösung:

Die Reihe über $|\langle x, u_n\rangle|^2$ konvergiert, das ist also eine Nullfolge. Damit gilt dasselbe für $\langle x, u_n\rangle$.

Hausaufgabe 2:

Für ein $a > 0$ sei $H := L^2(-a, a)$, $L_G := \{f \in H : f(t) = f(-t)$ für fast alle $t \in [-a, a]\}$ und $L_U := \{f \in H : f(t) = -f(-t)$ für fast alle $t \in [-a, a]\}$. Zeige:

a.) L_G und L_U sind unendlichdimensionale, abgeschlossene Untervektorräume von H.

b.) $L_U^\perp = L_G$ und $L_G^\perp = L_U$.

c.) Gib für beliebiges $h \in H$ die Abstände $d(h, L_G)$ sowie $d(h, L_U)$ an.

d.) Berechne für $t \in [-a, a]$ und $h(t) := t^2 + t$ die Abstände $d(h, L_G)$ und $d(h, L_U)$.

Lösung:

$H = L^2(-a, a)$, $L_G = \{f \in H : f(t) = f(-t)\text{f.ü.}\}$, $L_U = \{f \in H : f(t) = -f(-t)\}$.

Offensichtlich sind L_G und L_U Untervektorräume.

Sie sind unendlichdimensional, denn sie enthalten die Funktionen $\sin(\frac{n\pi\cdot}{a}, n \in \mathbb{N}$ respektive $\cos(\frac{m\pi\cdot}{a}), m \in \mathbb{N}_0$.

Sie sind abgeschlossen, denn aus $f_n \to f$ in $L^2(-a, a)$ folgt auch $f_n \to f$ sowie $f_n(-\cdot) \to f(-\cdot)$ in $L^2(0, a)$ und letztlich (Summen und Beträge erhalten die Konvergenz)

$$0 = \int_0^a |f_n(x) - f_n(-x)|^2 dx \to \int_0^a |f(x) - f(-x)|^2,$$

also $\int_0^a |f(x) - f(-x)| = 0$ für f_n in L_G und damit auch $f \in L_G$ (für L_U analog mit geändertem Vorzeichen).

Sei $u \in L_U, g \in L_G$. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a u(x)g(x)dx &= \int_{-a}^0 u(x)g(x)dx + \int_0^a u(x)g(x)dx\\ &= \int_{-a}^0 -u(-x)g(-x)dx + \int_0^a u(x)g(x)dx\\ &= \int_0^a -u(x)g(x)dx + \int_0^a u(x)g(x)dx = 0\end{aligned}$$

und damit $L_U \subset L_G^\perp$ und $L_G \subset L_U^\perp$. Da es sich (vgl. a) bei L_U und L_G um abgeschlossene Untervektorräume handelt, ist $L_U = (L_U^\perp)^\perp$ und $L_G = (L_G^\perp)^\perp$, damit folgt

$$L_U \subset L_G^\perp \subset (L_U \perp)^\perp = L_U,$$

also $L_U = L_G^\perp$ und analog $L_G = L_U \perp$.

Die Abstände sind also einfach die Normen der jeweiligen Anteile im (bzw. Projektionen auf den) anderen (orthogonalen) Teilraum. (Berechnung der Projektionen entsprechend den Integralen in Teil a.) In d) ergeben sich also einfach die Normen von t bzw. t^2.

Hausaufgabe 3:

Beweise den folgenden Satz[1]:
Es sei H ein Hilbertraum und $a\colon H \times H \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform[2]. Es sei a stetig ($a(x,y) \leq C\|x\|\|y\|$.) und koerzitiv[3]($a(x,x) \geq \widehat{C}\|x\|^2$). Außerdem sei $F \in H'$.
Dann gibt es eine eindeutige Lösung des Problems: Finde $u \in H$, sodass

$$a(v,u) = F(v) \qquad \forall v \in H.$$

Zeige dazu zunächst, dass es zu $x \in H$ ein eindeutiges $\widetilde{x} \in H$ gibt mit $a(x,\cdot) = \langle \cdot, \widetilde{x}\rangle$. Definiere dann $Ax := \widetilde{x}$ und weise nach, dass A linear und stetig ist.
Welche Eigenschaft von A wollen wir nun nachweisen? Warum genügt sie?
Für die Injektivität von A schätze $\|Ax\|$ nach unten gegen $\|x\|$ ab.
Aus dieser Abschätzung kannst du auch folgern, dass $A(H)$ abgeschlossen ist.
Untersuche dann das orthogonale Komplement von $A(H)$.

Lösung:

Die Existenz des eindeutigen $\widetilde{x}$ folgt sofort aus dem Rieszschen Darstellungssatz, da $a(x,\cdot)$ wegen der Stetigkeit von a stetig ist. Damit ist A wohldefiniert. Die Linearität ergibt sich aus der Linearität von a in der ersten Komponente. Aus den Abschätzungen (Stetigkeit und Koerzivität für a) erhält man durch Einsetzen von x bzw $\widetilde{x}$:

$$\frac{C}{\widehat{C}}\|x\| \leq \|Ax\| \leq C\|x\|, \tag{1}$$

also sowohl Stetigkeit als auch Injektivität von A.
Da sich auch $F(v)$ als $\langle v, f\rangle$ schreiben lässt, reicht Surjektivität von A (bzw. für Eindeutigkeit der Lösung Bijektivität, aber Injektivität haben wir ja schon) für die Lösbarkeit der Gleichung: Wir suchen das eindeutige Urbild u unter A von f. Aus (1) erhalten wir auch Abgeschlossenheit von $A(H)$: Sei y_n Folge in $A(H)$ $y_n \to y$ und $y_n = Ax_n$. Dann ist y_n Cauchyfolge und wegen $\|Ay_n - Ay_m\| \geq \frac{C}{\widehat{C}}\|x_n - x_m\|$ auch x_n. x_n konvergiert daher gegen ein x und die Stetigkeit von A liefert $y = Ax$, d.h. $y \in A(H)$.
Es gibt also ein orthogonales Komplement zu $A(H)$.
Sei $z \in A(H)^{\perp}$.
Dann ist $0 = \langle z, Ax\rangle = a(x,z)$ für alle $x \in H$, insbesondere für $x = z$, also $a(z,z) = 0$. Aus der Koerzitivität von a folgt dann aber $z = 0$, also ist das orthogonale Komplement von $A(H) = \{0\}$ und damit A surjektiv.

Hausaufgabe 4:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. $W_0^{1,2}(\Omega)$, die Vervollständigung von $C_0^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)$ in von dem Skalarprodukt

$$(u,v)_1 := \int_\Omega uv\,dx + \int_\Omega \nabla u \nabla v\,dx$$

induzierten Norm $\|.\|_1$, ist ein Hilbertraum. Man kann mithilfe der sog. *Poincareschen Ungleichung* zeigen, dass

$$\|u\|_0 = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

eine zu $\|.\|_1$ äuivalente Norm definiert.

a) Zeige:

$$V = \left\{ v \in W_0^{1,2}(\Omega) \,\middle|\, \int_\Omega v \cdot \operatorname{div}\varphi\,dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n) \right\}$$

ist abgeschlossener Unterraum von $W_0^{1,2}(\Omega)$.

b) Gegeben sei nun $f \in L^2(\Omega)$. Zeige, dass es genau ein $u \in V$ gibt mit

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx \quad \forall \varphi \in V.$$

[1] Er ist bekannt unter dem Namen „Lemma von Lax-Milgram“.
[2] Für $\mathbb{C}$−HRe: Sesquilinearform. Uns genügt in dieser Aufgabe aber der reelle Fall.
[3] Oft auch „koerziv“ oder „stark elliptisch“, das ist dasselbe.

Man nennt eine solche Funktion u dann auch schwache Lösung der Stokes-Gleichung

$$-\Delta u + \nabla p = f,\ \operatorname{div}\, u = 0 \text{ in } \Omega,\ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega,$$

worin $p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. (Multipliziere diese Gleichung mit $\varphi \in V$ und integriere partiell, um die obige Formulierung zu erhalten.)

Lösung:

a) Sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in $V \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ konvergierende Folge mit

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v.$$

Dann gilt:

$$\|v_n - v\|_1 = \left(\int_\Omega |v_n - v|^2\, dx + \int_\Omega |\nabla v_n - \nabla v|^2\, dx\right)^{1/2} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

also insbesondere

$$\|\partial_{x_j} v_n^{(i)} - \partial_{x_j} v^{(i)}\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\partial_{x_j} v_n^{(i)} - \partial_{x_j} v^{(i)}|^2\, dx\right)^{1/2} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Folglich gilt $\|\operatorname{div} v_n - \operatorname{div} v\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und insbesondere

$$\int_\Omega v \cdot \operatorname{div} \varphi\, dx = \int_\Omega \operatorname{div} v \cdot \varphi\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \operatorname{div} v_n \cdot \varphi\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega v_n \cdot \operatorname{div} \varphi\, dx = 0, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

b) Für $u, v \in V$ definieren wir

$$B(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx \quad \text{und} \quad F(v) := \int_\Omega f \cdot v\, dx.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} |F(v)| &\le \int_\Omega |f \cdot v|\, dx \le \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \le \alpha \|v\|_1 \\ |B(u,v)| &\le \int_\Omega |\nabla u \cdot \nabla v|\, dx \le \|u\|_0 \cdot \|v\|_0 \le C\|u\|_1 \cdot \|v\|_1 \end{aligned}$$

und

$$B(u,u) = \int_\Omega \nabla u^2\, dx = \|u\|_0^2 \ge \hat{C}\|v\|_1^2.$$

Also ist B eine stetige, koerzive und offensichtlich auch bilineare Abbildung von V in die reellen Zahlen und $F \in V'$. Darüber hinaus folgt aus Teilaufgabe (a), dass V als abgeschlossene Teilmenge des Hilbertraums $W^{1,2}(\Omega)$ selbst ein Hilbertraum ist, sodass wir hier das *Lemma von Lax-Milgram* anwenden können, dass uns die Existenz eines $u \in V$ sichert, für das

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi\, dx = B(u, \varphi) = F(\varphi) = \int_\Omega f \cdot \varphi\, dx \qquad \forall\, \varphi \in V.$$

Hausaufgabe 5:

Orthogonalisiere in $L^2(\mathbb{R})$ die Funktionen $e^{-\frac{t^2}{2}}, te^{-\frac{t^2}{2}}, t^2e^{-\frac{t^2}{2}}, t^3e^{-\frac{t^2}{2}}$ und erhalte so die ersten der sogenannten Hermiteschen Funktionen.

Lösung:
Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren. Man erhält mit $H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} e^{-t^2}$ (also $H_0(t) = 1, H_1(t) = 2t, H_2(t) = 4t^2 - 2, H_3(t) = 8t^3 - 12t$) dann

$$\Psi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t).$$

Hausaufgabe 6:
Der Fachschaftsrat lädt ein zum **Grillen in der Gruga** (Grillplatz 4) am **Donnerstag, dem 13. Juni 2013, ab 18:03 Uhr**. Wir stellen die Getränke, Grillgut bringt jeder selbst mit; wer möchte, auch Salate. Dazu könnt ihr euch in folgende Doodle-Liste eintragen:

www.doodle.com/wvn5kdzyxx87egsu

Das Grillen wird bei jedem Wetter stattfinden. Wir freuen uns auf euch!

Da wir schonmal bei Hinweisen sind...:

a) Auch alte Hausübungen können gerne noch abgegeben werden. (Punkte bringen sie nicht, aber es gibt eine Korrektur.)

b) Wir weisen nochmal darauf hin, dass es sich lohnen könnte, die Übungszettel zu bearbeiten und abzugeben.

c) Denkt daran, euch für die Klausur anzumelden.

Lösung:
Lest ihr überhaupt die Lösungen? Ein Päckchen Gummibärchen für den ersten[4], der mich darauf hinweist, dass hier dieser Text steht. J.

[4] außer Frank oder Robert