FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

8.5.2013

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Lösungsvorschlag zu den Hausaufgaben der 5. Übung

Hausaufgabe 1:

Beweise das folgende Kriterium dafür, dass eine Teilmenge von $(L^p, \|\cdot\|_{L^p})$ relativ kompakt ist:
Sei $1 \leq p < \infty$. Dann ist $\mathcal{F} \subset L^p(\mathbb{R})$ relativkompakt genau dann, wenn

i) $\mathcal{F}$ beschränkt ist,

ii) $\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\mathbb{R}\setminus[-R,R]} |f(x)|^p \, dx \to 0$ für $R \to \infty$,

iii) $\sup_{f\in\mathcal{F}} \int |f(x) - f(x+h)|^p \, dx \to 0$ für $h \to 0$. ("gleichgradige Stetigkeit im p-ten Mittel")

a) Zeige zunächst die Eigenschaft ii) für einzelne Funktionen aus L^p (also ohne sup).

b) Zeige auch iii) für einzelne Funktionen. Beginne dabei mit dem Fall „charakteristische Funktion eines beschränkten Intervalls" und approximiere allgemeine L^p-Funktionen durch einfache Funktionen (Treppenfunktionen).

c) Überdecke $\mathcal{F}$ mit endlich vielen Kugeln vom Radius ε. Warum ist das möglich?

d) Nutze die Mittelpunkte f_i der Kugeln und a) für jedes einzelne f_i, um ii) gleichmäßig für beliebiges $f \in \mathcal{F}$ zu zeigen.

e) Verfahre ebenso für iii).

· Zur Rückrichtung.
Definiere für $f \in L^p(\mathbb{R})$ die „Steklov-Mittelung" durch $(S_r(f))(x) = \frac{1}{r}\int_0^r f(x+s)\, ds$.

f) Zeige durch geschickte Anwendung der Hölderschen Ungleichung, dass $\|S_r(f)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq r^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$.

g) Zeige ebenso, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Abschätzung

$$|(S_r f)(x) - (S_r f)(x+h)| \leq r^{-\frac{1}{p}} \|f - f_h\|_p$$

gilt.

h) Zeige darüberhinaus, dass

$$\|f - S_r f\|_p \leq \sup_{0<h\leq r} \|f - f_h\|_p$$

. Schätze dazu den Betrag $|(f - S_r f)(x)|$ wieder mit der Hölderschen Ungleichung ab, integriere dann über $\mathbb{R}$ und nutze abschließend den Satz von Fubini.

i) Begründe die folgenden drei Aussagen:

- Es genügt, zu zeigen, dass eine Überdeckung von $\mathcal{F}$ mit 3ε-Kugeln existiert.
- Es gibt ein $\overline{R} > 0$, sodass $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}\setminus[-R,R])} < \varepsilon$ für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle $R > \overline{R}$.
- Es gibt ein $r > 0$, sodass
$$\|f - S_r f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \sup_{0\leq h\leq r} \|f - f_h\| < \varepsilon$$
für alle $f \in \mathcal{F}, \forall |h| < r$.

j) Zeige: Die Menge $\mathcal{M} = \{S_r f|_{[-2R,2R]}\, ; f \in \mathcal{F}\}$ ist eine relativkompakte Teilmenge von $C([-2R, 2R])$.

k) $\mathcal{M}$ lässt sich von endlich vielen Kugeln mit Radius $\frac{\varepsilon}{4R^{\frac{1}{p}}}$ und Mittelpunkten g_i überdecken. (Warum?) Definiere $f_i \in L^p(\mathbb{R})$ so, dass f_i auf $[-2R, 2R]$ mit g_i übereinstimmt. (Wähle für die letzten beiden Schritte nun R geeignet.)

l) Zeige abschließend, dass für jedes $f \in \mathcal{F}$ eines der f_i existiert mit $\|f - f_i\|_p \leq 3\varepsilon$ und vollende den Beweis des Satzes.

Lösung:

a) Satz von Lebesgue für $|f|^p\chi_{[-N,N]}$ mit $|f|^p$ als Majorante.

b) Für $\chi_{[a,b]}$ klar, Treppenfunktionen liegen dicht in L^p, Rest: siehe Aufgabenstellung.

c) $\mathcal{F}$ ist nach Voraussetzung relativkompakt und daher totalbeschränkt/präkompakt, lässt sich also mit einem ε-Netz überdecken.

d) Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Zu jedem f_i gibt es ein R_i mit $\int_{\mathbb{R}\setminus[-r,r]} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x < \varepsilon^p$ für alle $r > R_i$. R sei das Maximum dieser (endlich vielen) R_i. Zu $f \in \mathcal{F}$ gibt es ein f_i im Abstand (p-Norm) kleiner ε. Nun ist $\|)\|_{L^p(\mathbb{R}\setminus[-r,r]}f \leq \|f_i - f\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|)\|_{L^p(\mathbb{R}\setminus[-r,r]}f_i \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ für alle $r > R$, also ii) gezeigt.

e) Analoge Argumentation. $f_h = f(\cdot + h)$. Dann $\|f - f_h\|_p \leq \|f - f_i\| + \|f_i - (f_i)_h\| + \|(f_i)_h - f_h\| \leq 2\|f - f_i\| + \|f_i - (f_i)_h\|$, erster Summand klein durch Kugeln aus c), der zweite durch b) für die endlich vielen Kugelmittelpunkte. (Danach das δ aus der Konvergenzdefinition als Minimum der δ_i wählen.)

f) Hier und im Folgenden sei q stets so gewählt, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
$S_r f(x) = \frac{1}{r}\int_0^r f(x+s)\,\mathrm{d}s \leq \frac{1}{r}\int_0^r 1|f(x+s)| \leq \frac{1}{r}\left(\int_0^r 1\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^r f\right)^{\frac{1}{p}} \leq r^{-1+\frac{1}{q}}\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$. Diese Abschätzung gilt in jedem Punkt und damit erst recht für das Supremum.

g) $|(S_r f)(x) - (S_r f)(x+h)| = |\frac{1}{r}\int_0^r f(x+s)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{r}\int_0^r f(x+h+s)\,\mathrm{d}s| = |\frac{1}{r}\int_0^r |f(x+s) - f(x+h+s)|\,\mathrm{d}s$. Die Ungleichung folgt mit genau derselben Abschätzung wie in f).

h) $|(f - S_r f)(x)| = |\frac{1}{r}\int_0^r f(x) - f(x+s)\,\mathrm{d}s| \leq r^{-\frac{1}{p}}\left(\int_0^r |f(x) - f(x+s)|^p\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}}$. Also

$$\int_{\mathbb{R}} |f - S_r f|^p\,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{r}\int_0^r |f(x) - f(x+s)|^p\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x = \frac{1}{r}\int_0^r \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f(x+s)|^p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s = \frac{1}{r}\int_0^r \|f - f_s\|^p\,\mathrm{d}s \leq \frac{r}{r}\sup_{0\leq s\leq r}\|f - f_s\|$$

i)
- In metrischen Räumen ist Relativkompaktheit äquivalent zu Präkompaktheit.
- Das ist ii).
- Das ist iii).

j) Arzela-Ascoli. $[-2R, 2R]$ ist kompakt. Die Menge $S_r\mathcal{F}$ (r wie im letzten Punkt) ist punktweise beschränkt nach f) und i) und gleichgradig stetig mit g) und ii).

k) Überdeckung mit den Kugeln möglich, da nach j) relativkompakt: $(S_r\mathcal{F})|_{[T2R,2R]} \subset \bigcup_{i=1}^m B(g_i, \frac{\varepsilon}{4R}^{\frac{1}{p}})$, zu f gibt es also ein i mit $|S_r f(x) - g_i(x)| \leq (4R)^{-\frac{1}{p}}\varepsilon$ auf $[-2R, 2R]$.
f_i sei g_i auf $[-2R, 2R]$, null sonst. $R = \overline{R}$ ist eine gute Wahl.

l) Zu f sei i gewählt wie in k)

$$\begin{aligned}
\|f - f_i\| &\leq \|)\|_{L^p(\mathbb{R}\setminus[-2\overline{R},2\overline{R}}]f + \|f - g_i\|_{L^p([-2\overline{R},2\overline{R}} \\
&\leq \varepsilon + \|f - g_i\|_{L^p([-2\overline{R},2\overline{R}} \\
&\leq \varepsilon + \|f - S_r f\|_{L^p([-2\overline{R},2\overline{R}} + \|S_r f - g_i\|_{L^p([-2\overline{R},2\overline{R}} \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon + \|S_r f - g_i\|_{L^p([-2\overline{R},2\overline{R}} \\
&\leq 3\varepsilon
\end{aligned}$$

(Einsetzen der Definition von f_i, ii), Dreiecksungleichung, iii) und die letzte Abschätzung aus k).)
Damit ist $\mathcal{F}$ enthalten in jeweils endlich vielen 3ε-Kugeln, also prä- und daher relativkompakt.

Hausaufgabe 2:

Überprüfe, ob die folgenden Abbildungen linear und stetig sind.

a) Auf dem letzten Blatt haben wir die Sobolevräume $W^{1,p}(\Omega)$ eingeführt. Betrachte den „schwachen Ableitungsoperator“, der jeder Funktion $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ihre „schwache Ableitung“ (die Funktion v aus Blatt 4, HA 5) zuordnet, als Operator von $W^{1,p}(\Omega)$ nach $L^p(\Omega)$.

b) $T : l^p \longrightarrow l^p,\ (x_0, x_1, x_2, \dots) \longmapsto (0, x_0, x_1, x_2, \dots)\,.$

c) $T : L^p([0,1]) \longrightarrow L^p([0,1]),\ f \longmapsto T_f$ mit

$$T_f(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} x f(s)\, ds - \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 f(s)\, ds\,.$$

d) $T : l^p \longrightarrow l^p,\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (m_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $(m_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty$ fest.

e) $T : L^1([0,1]) \longrightarrow c_0,\ f \longmapsto (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_n = \int_0^1 f(t) t^n\, dt\,.$$

Lösung:

a) Seien $T : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega);\ u \longmapsto u'$ und $f, g \in W^{1,p}(\Omega)$. Nach Voraussetzung existieren eindeutige Funktionen v und w in $L^p(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega f\varphi'\, dx = -\int_\Omega v\varphi\, dx \qquad \text{und} \qquad \int_\Omega g\varphi'\, dx = -\int_\Omega w\varphi\, dx \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Ist nun $h \in L^p(\Omega)$ die Funktion mit $T(\lambda f + \mu g) = h$, so folgt

$$\int_\Omega h\varphi\, dx = -\int_\Omega (\lambda f + \mu g)\varphi'\, dx = -\lambda \int_\Omega v\varphi\, dx - \mu \int_\Omega w\varphi\, dx = \int_\Omega (\lambda v + \mu w)\varphi\, dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

und somit nach dem *Fundamentallemma der Variationsrechnung*

$$T(\lambda f + \mu g) = \lambda v + \mu w = \lambda T(f) + \mu T(g).$$

b) Für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in l^p ist

$$\begin{aligned} T(\lambda x + \mu y) &= (0, \lambda x_0 + \mu y_0, \lambda x_1 + \mu y_1, \dots) \\ &= \lambda(0, x_0, x_1, \dots) + \mu(0, y_0, y_1, \dots) = \lambda T(x) + \mu T(y), \end{aligned}$$

T also linear. Ferner gilt

$$\|Tx\|_p = \left(0 + \sum_{n=0}^\infty |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=0}^\infty |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 1 \cdot \|x\|_p$$

und somit $T \in L(l^p)$ mit $\|T\| = 1$.

c) Wegen

$$\begin{aligned} \|Tf\|_p &= \left(\int_0^1 |T_f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_0^1 \left| x\int_0^{\frac{1}{2}} f(s)\, ds - x^2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(s)\, ds\right|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \left(\int_0^1 \left((x + x^2) \cdot \int_0^1 |f(s)|\, ds\right)^p\, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \left(\int_0^1 \left((x + x^2) \cdot \left[\int_0^1 |f(s)|^p\, ds\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int_0^1 1\, ds\right]^{\frac{1}{q}}\right)^p\, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \left(\int_0^1 (x + x^2)^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \|f\|_p = \|h\|_p \cdot \|f\|_p \end{aligned}$$

für $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R};\ h(x) = x + x^2$, ist T wohldefiniert und beschränkt. Darüber hinaus ist

$$\begin{aligned} T_{\lambda f+\mu g}(x) &= \int_0^{\frac{1}{2}} x\Big(\lambda f(s) + \mu g(s)\Big)\, ds - \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \Big(\lambda f(s) + \mu g(s)\Big)\, ds \\ &= \lambda \left(\int_0^{\frac{1}{2}} x f(s)\, ds + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 f(s)\, ds \right) + \mu \left(\int_0^{\frac{1}{2}} x g(s)\, ds + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 g(s)\, ds \right) = \lambda T_f(x) + \mu T_g(x) \end{aligned}$$

und somit $T \in L(L^p([0,1])$.

d) Für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\|T(x)\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |m_n x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |m_n| \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|m\|_\infty \cdot \|x\|_\infty .$$

Daher ist T wohldefiniert, beschränkt und wegen

$$T(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \Big(m_n \cdot (\lambda \cdot x_n + \mu \cdot y_n) \Big)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda \cdot (m_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu \cdot (m_n y_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda \cdot T(x) + \mu \cdot T(y)$$

in $L(l^p)$. Wählen wir nun $x = e^j = (e_n^j)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$e_n^j := \begin{cases} 1\ ;\ n = j \\ 0\ ;\ \text{sonst} \end{cases},$$

folgt $\|e^j\|_p = 1$ und

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_p=1} \|T(x)\|_p \geq \|T(e^j)\|_p = |m_j| \quad \forall\, j \in \mathbb{N},$$

also auch

$$\|T\| \geq \sup_{j\in\mathbb{N}} |m_j| = \|m\|_\infty .$$

Daher ist $\|T\| = \|m\|_\infty$.

e) Wegen

$$\|T(f)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \int_0^1 f(t) \cdot t^n\, dt \right| \leq \left| \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_0^1 |f(t)| \cdot 1^n\, dt \right| = 1 \cdot \|f\|_1$$

ist T wohldefiniert und beschränkt. Darüber hinaus ist

$$\begin{aligned} T(\lambda f + \mu g) &= \left(\int_0^1 [\lambda \cdot f(t) + \mu \cdot g(t)] \cdot t^n\, dt \right)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= \lambda \cdot \left(\int_0^1 f(t) \cdot t^n\, dt \right)_{n\in\mathbb{N}} + \mu \left(\int_0^1 g(t) \cdot t^n\, dt \right)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda \cdot T(f) + \mu \cdot T(g) \end{aligned}$$

und somit $T \in L(L^1([0,1]), c_0)$. Wählen wir $f_0 \equiv 1 \in L^1([0,1])$ folgt $\|f\|_1 = 1$ und

$$\|T\| = \sup_{\|f\|_1=1} \|T(f)\|_\infty \geq \|T(f_0)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \int_0^1 t^n\, dt \right| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+1} = 1,$$

also $\|T\| = 1$.