FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

27.7.2013

Klausur zur Funktionalanalysis I im SS 2013

Hinweise zur Bearbeitung:

- Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt **180 Minuten**.
- Zur Klausur sind als Hilfsmittel ausschließlich Schreibwerkzeuge zugelassen. Jegliche Unterlagen oder elektronischen Hilfsmittel sind verboten, also insbesondere auch Skripte, Spickzettel und Taschenrechner.
- Bitte benutzen Sie nur **weißes Blankopapier**. Alle Blätter sind mit Namen zu versehen, fortlaufend zu nummerieren und nur einseitig in blau oder schwarz mit einem ordentlich funktionierenden Stift zu beschriften.
- Beginnen Sie für jede neue Aufgabe (nicht: Teilaufgabe) ein neues Blatt.
- Alle Ergebnisse sind zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.
- Mobiltelephone sind für die Dauer der Klausur abzuschalten.
- Bitte füllen Sie **zuerst** das Deckblatt aus und geben Sie dieses am Ende der Klausur mit ab.
- Zur Abgabe falten Sie das Aufgabenblatt bitte mit einer ordentlichen Faltkante.

Name: ____________________ Vorname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________ Studiengang: ____________________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ	Bonus	Σ	Note
2	8	4	8	3	7	6	4	6	7	55			

Aufgabe 1 (2 Punkte):
Nennen Sie ein Beispiel für a) **oder** b):

a) einen nichtseparablen Hilbertraum,

b) ein stetiges lineares Funktional auf einem Unterraum mit unendlich vielen verschiedenen stetigen normerhaltenden Fortsetzungen auf den ganzen Raum.

Aufgabe 2 (2+2+2+2 Punkte):

a) Was besagt die Besselsche Ungleichung?

b) Was ist die Aussage des Rieszschen Darstellungssatzes?

c) Nennen Sie einen Satz, der nach Banach benannt ist, und geben Sie seine Aussage an.

d) Skizzieren Sie den Beweis des Satzes von der gleichmäßigen Beschränktheit.

Aufgabe 3 (4 Punkte):
T sei ein selbstadjungierter stetiger Operator auf dem komplexen Hilbertraum H. Zeigen Sie:

$$\|(T+iI)x\|^2 = \|Tx\|^2 + \|x\|^2.$$

Aufgabe 4 (2+2+4 Punkte):
Sei $T\colon (C[0,42], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0,42], \|\cdot\|_\infty)$ definiert durch

$$Tf(x) = \int_0^x \sin(t) f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Untersuchen Sie T auf

a) Linearität,

b) Stetigkeit,

c) Kompaktheit.

Aufgabe 5 (3 Punkte):
Es sei $a > 0$. Und $A\colon L^2(0,\infty) \to L^2(0,\infty)$ sei definiert durch

$$Ax(t) = x(at).$$

Bestimmen Sie die Adjungierte.

Aufgabe 6 (2+2+3 Punkte):

a) Was versteht man unter einem vollständigen Orthogonalsystem?

b) In welchen Räumen ist die Existenz eines abzählbaren vollständigen ONS gesichert?

c) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein ONS. Untersuchen Sie diese Folge auf schwache Konvergenz.

Aufgabe 7 (2+4 Punkte):

a) Was besagt der Satz über die Neumann'sche Reihe?

b) Es sei $\gamma = 2\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\right)$. Zeigen Sie die Existenz einer eindeutigen Lösung $f \in L^2(\mathbb{R})$ von

$$f(x) = e^{-x^2} + \gamma^{-1} \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}} \cos(\sqrt{1+y^2})\,\mathrm{d}y.$$

Aufgabe 8 (4 Punkte):
Es sei $A \in L(X,Y)$ für Banachräume X, Y. Zeigen Sie: A' ist abgeschlossen.

Aufgabe 9 (2+4 Punkte):

a) Was besagt der Satz von der offenen Abbildung?

b) Die stetigen Funktionen $a, b, c \in C([0,1])$ seien derart gewählt, dass

$$a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x), \qquad u(0) = u(1) = 0$$

für jedes $f \in C([0,1])$ eine eindeutige Lösung $u \in C^2(0,1)$ habe. (Die Lösung zu f bezeichnen wir mit u_f.) Zeigen Sie die Existenz einer Konstanten C, sodass für alle $f \in C((0,1))$ die Abschätzung

$$\sup_{x\in(0,1)} |u_f''(x)| \leq C\|f\|_\infty$$

erfüllt ist.

Aufgabe 10 ((2+1)+4 Punkte):

a) Was versteht man unter der „kanonischen Einbettung in den Bidual"? Geben Sie auch eine ihrer Eigenschaften an.

b) Sei X normierter Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt schwach beschränkt, wenn $f(x_n)$ beschränkt ist für alle $f \in X'$. Zeigen Sie: Schwach beschränkte Folgen sind beschränkt.