FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

27.7.2013

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Lösungsvorschlag zur Klausur

Hinweise zur Bearbeitung:

- Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt **180 Minuten**.
- Zur Klausur sind als Hilfsmittel ausschließlich Schreibwerkzeuge zugelassen. Jegliche Unterlagen oder elektronischen Hilfsmittel sind verboten, also insbesondere auch Skripte, Spickzettel und Taschenrechner.
- Bitte benutzen Sie nur **weißes Blankopapier**. Alle Blätter sind mit Namen zu versehen, fortlaufend zu nummerieren und nur einseitig in blau oder schwarz mit einem ordentlich funktionierenden Stift zu beschriften.
- Beginnen Sie für jede neue Aufgabe (nicht: Teilaufgabe) ein neues Blatt.
- Alle Ergebnisse sind zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.
- Mobiltelephone sind für die Dauer der Klausur abzuschalten.
- Bitte füllen Sie **zuerst** das Deckblatt aus und geben Sie dieses am Ende der Klausur mit ab.
- Zur Abgabe falten Sie das Aufgabenblatt bitte mit einer ordentlichen Faltkante.

Name: ____________________ Vorname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________ Studiengang: ____________________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ	Bonus	Σ	Note
2	8	4	8	3	7	6	4	6	7	55			

Aufgabe 1 (2 Punkte):
Nennen Sie ein Beispiel für a) **oder** b):

a) einen nichtseparablen Hilbertraum,

b) ein stetiges lineares Funktional auf einem Unterraum mit unendlich vielen verschiedenen stetigen normerhaltenden Fortsetzungen auf den ganzen Raum.

Lösung:

a) (Siehe Übung 8.) Die Vervollständigung des $\mathbb{C}$-Vektorraums der Funktionen der Form $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\alpha_k t}$ (für ein $n \in \mathbb{N}$ und $c_k \in \mathbb{C}, \alpha_k \in \mathbb{R}$ für $k = 1, \dots, n$) unter dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \lim_{A \to \infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{A} f(t)\overline{g(t)}\, \mathrm{d}t.$$

b) (Siehe Übung 13.) Betrachte auf dem Unterraum $U := \{f \in X : f(a) = f(b)\}$ von $X := \{f : [0,1] \to \mathbb{R}, f \text{ beschränkt}\}$ das Funktional $\Phi(f) = f(a)$ (Norm 1, wird für konstante 1-Funktion angenommen) und als Fortsetzung $\Phi_\lambda(f) = \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$.

Aufgabe 2 (2+2+2+2 Punkte):

a) Was besagt die Besselsche Ungleichung?

b) Was ist die Aussage des Rieszschen Darstellungssatzes?

c) Nennen Sie einen Satz, der nach Banach benannt ist, und geben Sie seine Aussage an.

d) Skizzieren Sie den Beweis des Satzes von der gleichmäßigen Beschränktheit.

Lösung:

a) Für Orthonormalsysteme $\{e_n\}_n$ und Vektoren x im Hilbertraum gilt $\sum |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

b) Die stetigen lineare Funktionale eines Hilbertraums H sind genau die Abbildungen, die sich für $y \in H$ als $\langle \cdot, y \rangle$ darstellen lassen.

c) Z.B. Banach'scher Fixpunktsatz. Strikte Kontraktion auf vollständigem metrischen Raum hat eindeutigen Fixpunkt.

d) Betrachte die Mengen $\{x : |f(x)| \leq N \forall f \in \mathcal{F}\}$, folgere aus dem Satz von Baire, dass eine dieser Mengen nichtleeres Inneres hat und leite mithilfe der Kugel, auf der jetzt die Abschätzung für die stetigen linearen Funktionale gilt, eine entsprechende für den ganzen Raum her.

Aufgabe 3 (4 Punkte):
T sei ein selbstadjungierter stetiger Operator auf dem komplexen Hilbertraum H. Zeigen Sie:

$$\|(T + iI)x\|^2 = \|Tx\|^2 + \|x\|^2.$$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
\|(T+iI)x\|^2 &= \langle (T+iI)x, (T+iI)x\rangle \\
&= \langle Tx, Tx\rangle + \langle Tx, ix\rangle + \langle ix, Tx\rangle + \langle ix, ix\rangle \\
&= \|Tx\|^2 - i\langle Tx, x\rangle + i\langle x, Tx\rangle - i^2\|x\|^2 \\
&\overset{T \text{ s.a.}}{=} \|Tx\|^2 - i\langle Tx, x\rangle + i\langle Tx, x\rangle + \|x\|^2 = \|Tx\|^2 + \|x\|^2.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4 (2+2+4 Punkte):
Sei $T\colon (C[0,42], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0,42], \|\cdot\|_\infty)$ definiert durch

$$Tf(x) = \int_0^x \sin(t) f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Untersuchen Sie T auf

a) Linearität,

b) Stetigkeit,

c) Kompaktheit.

Lösung:

a)

$$T(\lambda f + g)(x) = \int_0^x \sin(t)(\lambda f(t) + g(t))\ \mathrm{d}t = \lambda \int_0^x \sin(t) f(t)\ \mathrm{d}t + \int_0^x \sin(t) g(t)\ \mathrm{d}t = \lambda Tf(x) + Tg(x)$$

b)

$$\|Tf(x)\|_\infty = \sup_{0 \le x \le 42} \left| \int_0^x \sin(t) f(t)\ \mathrm{d}t \right| \le \|f\|_\infty \int_0^x |\sin(t)|\ \mathrm{d}t \le 42\|f\|.$$

Damit ist Beschränktheit gezeigt und für lineare Abbildungen ist die äquivalent zur Stetigkeit.

c) Wir müssen untersuchen, ob das Bild einer beschränkten Menge relativkompakt ist.
Dazu sei $M \subset C[0,42]$ eine beschränkte Menge: $\forall f \in M : \|f\|_\infty \le C$.
Zunächst ist $T(M)$ punktweise beschränkt. Denn sei $x \in [0,42]$, dann ist

$$|Tf(x)| = \left| \int_0^x \sin(t) f(t)\ \mathrm{d}t \right| \le \int_0^x 1C\ \mathrm{d}t \le Cx.$$

Ferner ist $T(M)$ gleichgradig gleichmäßig stetig. Sei $\varepsilon > 0$, wähle $\delta = \varepsilon / C$, sei $f \in T(M)$, seien $x, y \in [0,42]$ mit $|x-y| < \delta$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
|Tf(x) - Tf(y)| &= \left| \int_0^x \sin(t) f(t)\ \mathrm{d}t - \int_0^y \sin(t) f(t)\ \mathrm{d}t \right| \\
&\left| \int_y^x \sin(t) f(t)\ \mathrm{d}t \right| \le |y-x| \cdot 1 \cdot C \le \delta C \le \frac{\varepsilon}{C} C = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Mit dem Satz von Arzela-Ascoli folgt nun, da zugleich $[0,42]$ kompakt ist, dass $T(M)$ relativkompakt in $C([0,42])$ ist, also T kompakt.

Aufgabe 5 (3 Punkte):
Es sei $a > 0$. Und $A\colon L^2(0,\infty) \to L^2(0,\infty)$ sei definiert durch

$$Ax(t) = x(at).$$

Bestimmen Sie die Adjungierte.

Lösung:

$$\langle Ax, y\rangle = \int_0^\infty x(at)y(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^\infty x(s)\frac{1}{a}y(\frac{s}{a})\ \mathrm{d}s = \langle x, A^*y\rangle,$$

also ist

$$A^*y(t) = \frac{1}{a}y(\frac{t}{a}).$$

Aufgabe 6 (2+2+3 Punkte):

a) Was versteht man unter einem vollständigen Orthogonalsystem?

b) In welchen Räumen ist die Existenz eines abzählbaren vollständigen ONS gesichert?

c) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein ONS. Untersuchen Sie diese Folge auf schwache Konvergenz.

Lösung:

a) Eine Menge von Vektoren in einem Hilbertraum, die paarweise orthogonal sind und deren lineare Hülle dicht im Raum liegt.

b) Separablen Hilberträumen. (Gram-Schmidt)

c) Jedes stetige lineare Funktional auf einem Hilbertraum lässt sich durch Skalarproduktbildung mit einem Element darstellen. Es ist daher für beliebiges festes $y \in H$ zu untersuchen, ob $\langle y, x_n\rangle$ gegen ein $\langle y, x\rangle$ konvergiert. Nach der Bessel'schen Ungleichung ist $\sum_{n=1}^\infty |\langle y, x_n\rangle|^2 \leq \|y\|^2$, es ist also $\langle y, x_n\rangle$ eine Nullfolge und daher x_n schwach konvergent gegen 0.

Aufgabe 7 (2+4 Punkte):

a) Was besagt der Satz über die Neumann'sche Reihe?

b) Es sei $\gamma = 2\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x\right)$. Zeigen Sie die Existenz einer eindeutigen Lösung $f \in L^2(\mathbb{R})$ von

$$f(x) = e^{-x^2} + \gamma^{-1}\int_{\mathbb{R}} f(y)\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}\cos(\sqrt{1+y^2})\ \mathrm{d}y.$$

Lösung:

a) Wenn $A\colon X \to X$ ein stetiger linearer Operator auf einem Banachraum X ist und seine Norm kleiner als 1, so konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^\infty A^n$ und $I - A$ ist invertierbar und hat als Inverse gerade den Wert dieser Reihe.

b) Die Gleichung lässt sich gerade als $(I-A)f = g$ mit $g(x) = e^{-x^2}$ (diese Funktion liegt in L^2) und

$$Af(x) = \gamma^{-1} \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}} \cos(\sqrt{1+y^2})\, \mathrm{d}y$$

schreiben. Also $f = (I-A)^{-1}g$, wenn $I-A$ invertierbar ist. Wir schätzen die Norm von A ab:

$$\begin{aligned}
\|Af\|_{L^2}^2 &= \gamma^{-2} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}} \cos(\sqrt{1+y^2})\, \mathrm{d}y \right)^2 \mathrm{d}x \\
&\leq \gamma^{-2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}^2}\, \mathrm{d}x \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)| \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \cdot 1\, \mathrm{d}y \right)^2 \\
&\leq \gamma^{-2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} |f(y)|^2\, \mathrm{d}y \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+y^2}\, \mathrm{d}y \\
&\leq \gamma^{-2} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x \right)^2 \|f\|_{L^2}^2 \\
&\leq \frac{1}{4} \|f\|^2,
\end{aligned}$$

also $\|A\| \leq \frac{1}{2}$ und damit nach dem Satz über die Neumannsche Reihe (L^2 ist Banachraum) $I-A$ invertierbar, es folgt die Behauptung.

Aufgabe 8 (4 Punkte):
Es sei $A \in L(X,Y)$ für Banachräume X, Y. Zeigen Sie: A' ist abgeschlossen.

Lösung:
Es sei $y_n' \to y' \in Y'$ und $A'y_n' \to x' \in X'$. Zu zeigen ist $A'y' = x'$. Es ist für beliebiges $x \in X$

$$\begin{aligned}
< A'y', x > =< y', Ax > &=< \lim_{n\to\infty} y_n', Ax >= \lim_{n\to\infty} < y_n', Ax > \\
&= \lim_{n\to\infty} < A'y_n', x >=< \lim_{n\to\infty} A'y_n', x >=< x', x >,
\end{aligned}$$

also $A'y' = x'$ und damit A' abgeschlossen.

Aufgabe 9 (2+4 Punkte):

a) Was besagt der Satz von der offenen Abbildung?

b) Die stetigen Funktionen $a, b, c \in C([0,1])$ seien derart gewählt, dass

$$a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x), \qquad u(0) = u(1) = 0$$

für jedes $f \in C([0,1])$ eine eindeutige Lösung $u \in C^2(0,1)$ habe. (Die Lösung zu f bezeichnen wir mit u_f.) Zeigen Sie die Existenz einer Konstanten C, sodass für alle $f \in C((0,1))$ die Abschätzung

$$\sup_{x\in(0,1)} |u_f''(x)| \leq C\|f\|_\infty$$

erfüllt ist.

Lösung:

a) Jede stetige, lineare Abbildung zwischen zwei Banachräumen, die surjektiv ist, ist offen (also ihre Umkehrfunktion stetig).

b) Wir definieren A mit $Au = a(x)u''(x)+b(x)u'(x)+c(x)$ als Abbildung zwischen zwei geeigneten Banachräumen. Hier bieten sich $C^2(0,1)$ und $C^0(0,1)$ an, mit $\|u\| = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty + \|u''\|_\infty$ bzw. Supremumsnorm. Dann ist $A\colon C^2 \to C(0,1)$ stetig, denn

$$\|Au\|_\infty = \|au''+bu'+c\|_\infty \leq \sup|a(x)|\|u''\|_\infty+\sup|b(x)|\|u'\|_\infty+\sup|c(x)|\|u\|_\infty \leq \max\{\sup|a|, \sup|b|, \sup|c|\}\|u\|_{C^2}.$$

Nach Voraussetzung ist A bijektiv. Nach dem Satz über die offene Abbildung ist daher A offen, also A^{-1} stetig. Damit ist (mit $C = \|A^{-1}\|$)

$$\|u_f\|_{C^2} = \|A^{-1}f\| \leq C\|f\|,$$

insbesondere also

$$\sup_{x\in(0,1)} |u_f''(x)| \leq C\|f\|_\infty.$$

Aufgabe 10 ((2+1)+4 Punkte):

a) Was versteht man unter der „kanonischen Einbettung in den Bidual“? Geben Sie auch eine ihrer Eigenschaften an.

b) Sei X normierter Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt schwach beschränkt, wenn $f(x_n)$ beschränkt ist für alle $f \in X'$. Zeigen Sie: Schwach beschränkte Folgen sind beschränkt.

Lösung:

a) Die Abbildung $j_X : x \mapsto \{f \mapsto f(x),\ \text{für } f \in X'\}$. Sie ist stetige lineare Isometrie.

b) Betrachte die Menge $\{j_X(x_n)\}$. Es handelt sich um eine Menge stetiger linearer Funktionale auf X'. (X' ist als Dualraum dabei ein Banachraum.) Sie ist punktweise beschränkt, nach dem Satz von Banach-Steinhaus also auch gleichmäßig. D.h. es gibt $C \in \mathbb{R}$ mit $\|j_X(x_n)\| \leq C$ für alle n. Nun ist j_X aber Isometrie, also $\|x_n\| = \|j_X(x_n)\|$. Damit ist auch $\{x_n\}$ beschränkt. Das war zu zeigen.