FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

21.9.2013

Nachklausur zur Funktionalanalysis I im SS 2013

Hinweise zur Bearbeitung:

- Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt **180 Minuten**.
- Zur Klausur sind als Hilfsmittel ausschließlich Schreibwerkzeuge zugelassen. Jegliche Unterlagen oder elektronischen Hilfsmittel sind verboten, also insbesondere auch Skripte, Spickzettel und Taschenrechner.
- Bitte benutzen Sie nur **weißes Blankopapier**. Alle Blätter sind mit Namen zu versehen, fortlaufend zu nummerieren und nur einseitig in blau oder schwarz mit einem ordentlich funktionierenden Stift zu beschriften.
- Beginnen Sie für jede neue Aufgabe (nicht: Teilaufgabe) ein neues Blatt.
- Alle Ergebnisse sind zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.
- Mobiltelephone sind für die Dauer der Klausur abzuschalten.
- Bitte füllen Sie **zuerst** das Deckblatt aus und geben Sie dieses am Ende der Klausur mit ab.
- Zur Abgabe falten Sie das Aufgabenblatt bitte mit einer ordentlichen Faltkante.

Name: ____________________ Vorname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________ Studiengang: ____________________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ	Bonus	Σ	Note
2	8	4	7	5	6	4	4	6	5	51			

Aufgabe 1 (2 Punkte):
Nennen Sie ein Beispiel für a) **oder** b):

a) einen abgeschlossenen, aber nicht stetigen Operator,

b) eine schwach konvergente, aber nicht konvergente Folge.

Aufgabe 2 (2+2+2+2 Punkte):

a) Sei A ein stetiger linearer bijektiver Operator vom Banachraum X in den Banachraum Y. Ist dann $A^{-1} \in L(Y, X)$? (Begründen Sie Ihre Antwort kurz.)

b) In welchen Banachräumen ist die abgeschlossene Einheitskugel kompakt?

c) Was besagt das Lemma von Lax-Milgram?

d) Was versteht man unter einem kompakten Operator?

Aufgabe 3 (4 Punkte):
Es sei H ein reeller Hilbertraum. Zeigen Sie für $x, y \in H$: $x \perp y$ genau dann, wenn $\|y\| \leq \|\lambda x + y\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 4 (2+2+3 Punkte):
Gegeben sei der Operator $A\colon l^2 \to l^2$ mit

$$(Ax)_n = \frac{x_{n+1}}{2n}.$$

Untersuchen Sie A auf Beschränktheit, bestimmen Sie Norm und Adjungierte von A.

Aufgabe 5 (5 Punkte):
Es sei V ein Untervektorraum von $C([0,1], \|\cdot\|_\infty)$ und es gebe $C > 0$, sodass

$$\forall\, f \in V\ \exists\, \alpha \in (\frac{1}{2}, 1): \quad |f(x) - f(y)| \leq C\|f\|_\infty |x - y|^\alpha.$$

Zeigen Sie: V ist endlichdimensional.

Aufgabe 6 (2+4 Punkte):

a) Was besagt der Satz vom abgeschlossenen Graphen?

b) X, Y seien Banachräume, $T\colon X \to Y$ und $S\colon Y' \to X'$ seien linear. Es gelte für alle $x \in X$ und für alle $g \in Y'$, dass $g(Tx) = (Sg)(x)$. Zeigen Sie: T und S sind stetig.

Aufgabe 7 (4 Punkte):
X sei ein normierter Raum, S eine Basis von X'. Zeigen Sie

$$\bigcap_{f \in S} \ker f = \{0\}.$$

Aufgabe 8 (4 Punkte):
Sei H ein Hilbertraum. Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ genau dann gegen $x \in H$ konvergiert, wenn $x_n \rightharpoonup x$ und $\|x_n\| \to \|x\|$.

Aufgabe 9 (6 Punkte):
Zeigen Sie: Es gibt ein stetiges lineares Funktional Φ auf $L^\infty(\mathbb{R})$ mit der Norm $\|f\|_{L^\infty} = \operatorname{esssup} |f|$, sodass $\|\Phi\| = 1$ und $\Phi f = f(0)$ für alle stetigen beschränkten Funktionen f.
(Beachten Sie, dass wegen der Definition über Äquivalenzklassen für allgemeine $f \in L^\infty$ der Ausdruck $f(0)$ nicht wohldefiniert ist.)

Aufgabe 10 (5 Punkte):
Gegeben sei eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(-\pi, 3\pi)$ mit $\|f_n\|_\infty < 42$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Es gibt eine Funktion $f\colon (-\pi, 3\pi) \to \mathbb{R}$ mit $\int_{-\pi}^{3\pi} f^2(x)\, \mathrm{d}x < \infty$ und eine Teilfolge f_{n_k} derart, dass für alle Funktionen $g \in L^4(-\pi, 3\pi)$

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{3\pi} f_{n_k}(x) g(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{3\pi} g(x) f(x)\, \mathrm{d}x$$

gilt.