FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

21.9.2013

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Lösungsvorschlag zur Nachklausur

Hinweise zur Bearbeitung:

- Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt **180 Minuten**.
- Zur Klausur sind als Hilfsmittel ausschließlich Schreibwerkzeuge zugelassen. Jegliche Unterlagen oder elektronischen Hilfsmittel sind verboten, also insbesondere auch Skripte, Spickzettel und Taschenrechner.
- Bitte benutzen Sie nur **weißes Blankopapier**. Alle Blätter sind mit Namen zu versehen, fortlaufend zu nummerieren und nur einseitig in blau oder schwarz mit einem ordentlich funktionierenden Stift zu beschriften.
- Beginnen Sie für jede neue Aufgabe (nicht: Teilaufgabe) ein neues Blatt.
- Alle Ergebnisse sind zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.
- Mobiltelephone sind für die Dauer der Klausur abzuschalten.
- Bitte füllen Sie **zuerst** das Deckblatt aus und geben Sie dieses am Ende der Klausur mit ab.
- Zur Abgabe falten Sie das Aufgabenblatt bitte mit einer ordentlichen Faltkante.

Name: ____________________ Vorname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________ Studiengang: ____________________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ	Bonus	Σ	Note
2	8	4	7	5	6	4	4	6	5	51			

Aufgabe 1 (2 Punkte):
Nennen Sie ein Beispiel für a) **oder** b):

a) einen abgeschlossenen, aber nicht stetigen Operator,

b) eine schwach konvergente, aber nicht konvergente Folge.

Lösung:

a) Die Ableitung als Abbildung zwischen den einmal stetig differenzierbaren Funktionen mit Supremumsnorm und den stetigen Funktionen mit Supremumsnorm.

b) Ein abzählbares Orthonormalsystem in einem separablen Hilbertraum.

Aufgabe 2 (2+2+2+2 Punkte):

a) Sei A ein stetiger linearer bijektiver Operator vom Banachraum X in den Banachraum Y. Ist dann $A^{-1} \in L(Y, X)$? (Begründen Sie Ihre Antwort kurz.)

b) In welchen Banachräumen ist die abgeschlossene Einheitskugel kompakt?

c) Was besagt das Lemma von Lax-Milgram?

d) Was versteht man unter einem kompakten Operator?

Lösung:

a) Ja, Satz von der offenen Abbildung. (Bzw. Korollar daraus: „Satz von Banach über die stetige Inverse")

b) endlichdimensionalen

c) Ist H ein Hilbertraum, $f \in H'$ und $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige und koerzive Bilinearform, so folgt aus dem Lemma von Lax-Milgram die Existenz einer eindeutigen Lösung $u \in H$ der Gleichung

$$a(u, v) = f(v) \qquad \forall\, v \in H.$$

d) Eine stetige Abbildung, die beschränkte Mengen in relativkompakte Mengen überführt.

Aufgabe 3 (4 Punkte):
Es sei H ein reeller Hilbertraum. Zeigen Sie für $x, y \in H$: $x \perp y$ genau dann, wenn $\|y\| \leq \|\lambda x + y\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt.

Lösung:
Wenn $x \perp y$, ist

$$\begin{aligned}\|y\|^2 &\leq \|y\|^2 + \lambda^2\|x\|^2 + 0 \\ &= \|y^2\| + \|\lambda x\|^2 + 2\langle \lambda x, y\rangle \\ &= \|y + \lambda x\|^2.\end{aligned}$$

Ist umgekehrt $\|y\| \leq \|\lambda x + y\|$, so gilt offenbar (quadrieren, ausmultiplizieren):

$$\begin{aligned}&\|y\|^2 \leq \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\ \Longleftrightarrow\ & 0 \leq \lambda(\lambda\|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle)\end{aligned}$$

Für $\lambda > 0$ also

$$0 \leq \lambda\|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle,$$

und für $\lambda < 0$ lässt sich folgern

$$0 \geq \lambda\|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle.$$

Mit $\lambda \to 0$ folgt daher

$$0 \leq \langle x, y\rangle$$

und

$$0 \geq \langle x, y\rangle,$$

also $\langle x, y\rangle = 0$, d.h. $x \perp y$.

Aufgabe 4 (2+2+3 Punkte):
Gegeben sei der Operator $A\colon l^2 \to l^2$ mit

$$(Ax)_n = \frac{x_{n+1}}{2n}.$$

Untersuchen Sie A auf Beschränktheit, bestimmen Sie Norm und Adjungierte von A.

Lösung:
Es ist

$$\|Ax\|_{l^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x_{n+1}}{2n})^2 \leq \sum_{n=2}^{\infty}(\frac{x_n}{2})^2 = \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{\infty} x_n^2 \leq \frac{1}{4}\|x\|,$$

also A beschränkt mit Norm $\leq \frac{1}{2}$.
Für $x = (0, 1, 0, 0, 0, \ldots)$, der $\|x\| = 1$ erfüllt, sieht man auch

$$\|Ax\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x_{n+1}}{2n})^2 = \left(\frac{x_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

also $\|A\| \geq \frac{1}{2}$ und damit $\|A\| = \frac{1}{2}$.
Zur Bestimmung der Adjungierten berechnen wir

$$\langle Ax, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_{n+1}}{2n}y_n = \sum_{n=2}^{\infty}x_n\frac{y_{n-1}}{2(n-1)} = \langle x, (0, \frac{y_1}{2}, \frac{y_2}{4}, \frac{y_3}{6}, \ldots)\rangle,$$

erhalten also

$$A^*y = (0, \frac{y_1}{2}, \frac{y_2}{4}, \frac{y_3}{6}, \ldots).$$

Aufgabe 5 (5 Punkte):
Es sei V ein Untervektorraum von $C([0,1], \|\cdot\|_\infty)$ und es gebe $C > 0$, sodass

$$\forall\, f \in V\ \exists\, \alpha \in (\frac{1}{2}, 1): \quad |f(x) - f(y)| \leq C\|f\|_\infty|x-y|^\alpha.$$

Zeigen Sie: V ist endlichdimensional.

Lösung:
Wir zeigen dazu, dass die Einheitskugel relativkompakt ist. Daraus folgt Endlichdimensionalität.
Sie ist punktweise beschränkt. (Sogar gleichmäßig; es ist die Einheitskugel.)
Ferner ist sie gleichgradig glm. stetig. Denn für $f \in V$ mit $\|f\| \leq 1$ ist

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot 1|x-y|^\alpha \leq C|x-y|^{\frac{1}{2}}.$$

Mit dem Satz von Arzela-Ascoli folgt jetzt Relativkompaktheit in $C([0,1])$.

Aufgabe 6 (2+4 Punkte):

a) Was besagt der Satz vom abgeschlossenen Graphen?

b) X, Y seien Banachräume, $T\colon X \to Y$ und $S\colon Y' \to X'$ seien linear. Es gelte für alle $x \in X$ und für alle $g \in Y'$, dass $g(Tx) = (Sg)(x)$. Zeigen Sie: T und S sind stetig.

Lösung:

a) Für einen linearen Operator zwischen Banachräumen sind Stetigkeit und Abgeschlossenheit äquivalent.

b) Wir zeigen zunächst die Abgeschlossenheit von T. Es gelte $x_n \to x$, $Tx_n \to y$. Nachzuweisen ist $Tx = y$. Es gilt für alle $g \in Y'$, dass

$$g(y) \leftarrow g(Tx_n) = (Sg)(x_n) \to (Sg)(x) = g(Tx),$$

also $y = Tx$.
Analog für S: Sei $y'_n \to y'$, $Sy'_n \to x'$. Dann gilt für $x \in X$:

$$\langle x', x\rangle \leftarrow \langle Sy'_n, x\rangle = \langle y'_n, Tx\rangle \to \langle y', Tx\rangle = \langle Sy', x\rangle,$$

also $x' = Sy'$. Der Satz vom abgeschlossenen Graphen liefert daher die Behauptung.

Aufgabe 7 (4 Punkte):
X sei ein normierter Raum, S eine Basis von X'. Zeigen Sie

$$\bigcap_{f \in S} \ker f = \{0\}.$$

Lösung:
Wegen der Linearität aller $f \in S \subset X'$ liegt 0 in jedem der Kerne und damit im Schnitt.
Liege x im Schnitt der Kerne. Dann ist $f(x) = 0$ für alle $f \in X'$, denn diese lassen sich als endliche Linearkombination der Elemente aus S darstellen.
Aber nach (dem Korollar aus) dem Satz von Hahn-Banach gibt es für $x \neq 0$ jeweils eine stetige Linearform, die in x den Wert $\|x\| \neq 0$ annimmt. (Auf der linearen Hülle von x explizit konstruieren, dann fortsetzen.) Also liegt außer 0 nichts im Schnitt der Kerne.

Aufgabe 8 (4 Punkte):
Sei H ein Hilbertraum. Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ genau dann gegen $x \in H$ konvergiert, wenn $x_n \rightharpoonup x$ und $\|x_n\| \to \|x\|$.

Lösung:
Starke Konvergenz impliziert immer schwache und wegen $|\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\|$ konvergiert auch die Folge der Normen.
Interessant ist die andere Richtung: Es gelte $x_n \rightharpoonup x$ und $\|x_n\| \to \|x\|$.

$$\begin{aligned}\|x_n - x\|^2 &= \langle x_n - x, x_n - x\rangle \\ &= \underbrace{\|x_n\|^2}_{\to\|x\|^2 \text{wg. Kgz. der Normen}} - 2\underbrace{\langle x_n, x\rangle}_{\to\langle x,x\rangle \text{ wegen der schw. Kgz}} + \|x\|^2 \to \|x\|^2 - 2\langle x, x\rangle + \|x\|^2 = 0.\end{aligned}$$

Aufgabe 9 (6 Punkte):
Zeigen Sie: Es gibt ein stetiges lineares Funktional Φ auf $L^\infty(\mathbb{R})$ mit der Norm $\|f\|_{L^\infty} = \operatorname{esssup}|f|$, sodass $\|\Phi\| = 1$ und $\Phi f = f(0)$ für alle stetigen beschränkten Funktionen f.
(Beachten Sie, dass wegen der Definition über Äquivalenzklassen für allgemeine $f \in L^\infty$ der Ausdruck $f(0)$ nicht

wohldefiniert ist.)

Lösung:
Die stetigen beschränkten Funktionen bilden einen Unterraum von $L^\infty(\mathbb{R})$. Auf diesem Unterraum lässt sich Φ_c mit $\Phi_c(f) = f(0)$ definieren. (Für stetige Funktionen ist $f(0)$ als Ausdruck erklärt.)
Das ist ein lineares Funktional.
Es ist $\|\Phi_c\| \leq 1$, da $|\Phi_c(f)| = |f(0)| \leq \sup |f(x)| = \|f\|$. Durch Einsetzen der konstanten 1-Funktion sieht man: $\|\Phi_c\| \geq 1$, also $\|\Phi_c\| = 1$.
Nach dem Satz von Hahn-Banach kann man nun Φ_c zu einem stetigen linearen Funktional auf dem ganzen Raum fortsetzen, das dieselbe Norm hat. Wir nennen dieses Φ und haben die Aufgabe damit gelöst.

Aufgabe 10 (5 Punkte):
Gegeben sei eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(-\pi, 3\pi)$ mit $\|f_n\|_\infty < 42$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Es gibt eine Funktion $f\colon (-\pi, 3\pi) \to \mathbb{R}$ mit $\int_{-\pi}^{3\pi} f^2(x)\ \mathrm{d}x < \infty$ und eine Teilfolge f_{n_k} derart, dass für alle Funktionen $g \in L^4(-\pi, 3\pi)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{3\pi} f_{n_k}(x)g(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{3\pi} g(x)f(x)\ \mathrm{d}x$$

gilt.

Lösung:
Die Folge ist in der $\|\cdot\|_\infty$-Norm beschränkt, erst recht also in der L^2-Norm. (Endliches Gebiet)
Sie enthält daher eine schwach konvergente Teilfolge $f_{n_k} \rightharpoonup f \in L^2$. ($L^2$ als Hilbertraum ist reflexiver Banachraum.)
Schwache Konvergenz bedeutet dabei

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{3\pi} f_{n_k}(x)g(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{3\pi} f(x)g(x)\ \mathrm{d}x$$

für alle $g \in L^2(-\pi, 3\pi)$, insbesondere natürlich auch für $g \in L^4(-\pi, 3\pi) \subset L^2(-\pi, 3\pi)$.