FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

11.4.2013

Lösungsvorschlag zu den Präsenzaufgaben der 1. Übung

Präsenzaufgabe 1:

Gib auf der Menge $X = \{1, 2, 3, 4\}$ eine Metrik an.
Gib verschiedene Abbildungen $d\colon X^2 \to \mathbb{R}$ an, die keine Metriken sind.

Lösung:

Eine mögliche Metrik auf der Menge X ist zum Beispiel die sogenannte *diskrete* Metrik aus Präsenzaufgabe 2.

Keine Metriken sind zum Beispiel:

$$n : X^2 \longrightarrow \mathbb{R}\,, n(x,y) := 0\,, \quad m : X^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ m(x,y) := y - x\,, \quad \text{oder} \quad p : X^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ p(x,y) := y^x\,.$$

Präsenzaufgabe 2:

Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge und $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

Zeige, dass d eine Metrik auf M ist. Beschreibe die offenen und abgeschlossenen Mengen.

Lösung:

Die *positive Definitheit* folgt direkt nach Definition und ebenso die *Symmetrie*, da

$$d(x,y) = 1 = d(y,x) \quad \text{für} \quad x \neq y\,.$$

Die Dreiecksungleichung beweisen wir durch eine Fallunterscheidung:

<u>Fall 1:</u> $x = y$, dann folgt aus der Nichtnegtivität:

$$d(x,y) = 0 \leq d(x,z) + d(z,y)\,.$$

<u>Fall 2:</u> $x \neq y$, dann folgt entweder $z \neq x$ oder $y \neq z$ und damit:

$$d(x,y) = 1 \leq d(x,z) + d(z,y)\,.$$

Nun zur Charakterisierung der offenen und abgeschlossenen Mengen in M.
Nach Definition ist $A \subseteq M$ offen bzgl. d, wenn es zu jedem Punkt $a \in A$ eine Umgebung

$$U_r(a) := \{\, x \in M \,|\, d(x,a) < r \,\}$$

mit irgendeinem $r > 0$ gibt, sodass $U_r(a) \subset A$.
Offensichtlich ist daher jede Teilmenge $A \subseteq M$ offen, da für $a \in A$ z. B.

$$U_{1/3}(a) = \left\{ x \in M \,\middle|\, d(x,a) < \frac{1}{3} \right\} = \{\, a \,\} \subseteq A\,.$$

Darüber hinaus ist jede Teilmenge $A \subseteq M$ aber auch abgeschlossen, denn ist $a \in M$ ein Häufungspunkt von A, der nicht in A enthalten ist, so gibt es in jeder Umgebung, also auch in $U_{1/3}(a) = \{\, a \,\}$, einen Punkt $a' \in A$ mit $a' \neq a$.

Das ist aber offensichtlich nicht möglich und somit gehört jeder Häufungspunkt der Menge A zu A.

Präsenzaufgabe 3:
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Beweise die folgende Ungleichung für alle $w, x, y, z \in X$:

$$|d(x,y) - d(z,w)| \leq d(x,z) + d(w,y).$$

Lösung:
Aus der *Dreiecksungleichung* und der *Symmetrie* folgt für alle $w, x, y, z \in X$

$$\begin{aligned} d(z,w) &\leq d(z,x) + d(x,w) \\ &\leq d(z,x) + d(x,y) + d(y,w) \\ &= d(x,z) + d(x,y) + d(w,y) \end{aligned}$$

also

$$-\Big(d(x,y) - d(z,w)\Big) = d(z,w) - d(x,y) \leq d(x,z) + d(w,y)\,.$$

Analog erhält man

$$d(x,y) - d(z,w) \leq d(x,z) + d(w,y)\,,$$

und damit die Behauptung.

Präsenzaufgabe 4:
Beweise, dass eine Funktion $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ genau dann eine Metrik auf M ist, wenn

$$\forall\, x,y \in M:\quad d(x,y) = 0 \iff x = y \quad \text{und} \quad \forall\, x,y,z \in M:\quad d(x,y) \leq d(z,x) + d(y,z)$$

gelten.

Lösung:
Wir erinnern zunächst an die Definition im Skript.

M eine Menge. Dann heißt $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Metrik auf M, falls für alle $x, y, z \in M$

$$\begin{aligned} &(a)\ d(x,y) \geq 0 \quad \text{und} \quad d(x,y) = 0 \iff x = y \\ &(b)\ d(x,y) = d(y,x) \\ &(c)\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)\,. \end{aligned}$$

Nun zum Beweis der Aussage.

„$\Longrightarrow$“: Klar nach Definition.

„$\Longleftarrow$“: Setzen wir voraus, dass für alle $x, y, z \in M$

$$(1)\ \ d(x,y) = 0 \iff x = y \quad \text{und} \quad (2)\ \ d(x,y) \leq d(z,x) + d(y,z)$$

bleibt lediglich zu zeigen, dass

$$d(x,y) \geq 0 \quad \text{und} \quad d(x,y) = d(y,x) \quad \forall\, x,y,z \in M\,.$$

Setzen wir $x = z$, so folgt mit (1) und (2)

$$d(z,y) \leq d(z,z) + d(y,z) \quad \iff \quad d(z,y) - d(y,z) \leq 0 \ \ \forall\, y,z \in M$$

und analog für $y = z$

$$d(x,z) \leq d(z,x) + d(z,z) \quad \iff \quad d(z,x) - d(x,z) \geq 0 \ \ \forall\, x,z \in M\,.$$

Setzen wir nun $y = x$ erhalten wir

$$d(z,x) - d(x,z) \leq 0 \quad \text{und} \quad d(z,x) - d(x,z) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad d(x,z) = d(z,x) \;\; \forall\, x,z \in M\,,$$

also die *Symmetrie*. Zu guter Letzt erhalten wir damit für $x = y$ in (2)

$$0 = d(x,x) \leq d(z,x) + d(x,z) = 2d(x,z) \quad \Longleftrightarrow \quad d(x,z) \geq 0 \;\; \forall\, x,z \in M\,.$$