FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

13.6.2013

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Lösungsvorschlag zu den Präsenzaufgaben der 10. Übung

Präsenzaufgabe 1:

Sei H ein Hilbertraum. Gib eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass die Identität $I\colon H \to H$ kompakt ist.
Ist der Rechtsshift auf l^2 kompakt?

Lösung:
H endlichdimensional. Siehe alte Übungen.
Die Komposition von Linksshift und Rechtsshift liefert die Identität, die Verknüpfung von stetigem mit kompaktem Operator liefert einen kompakten Operator. l^2 ist aber nicht endlichdimensional.

Präsenzaufgabe 2:

Sei $k\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Auf $L^2(0,1)$ sei der Operator T durch

$$Tf(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y$$

definiert. Bestimme T^*. Unter welcher Bedingung an k ist T selbstadjungiert?

Lösung:
Das Produkt aus k und den L^2-Funktionen f und g ist integrierbar, der Satz von Fubini also anwendbar.

$$\langle Tf, g\rangle = \int_0^1 \int_0^1 k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^1 k(x,y)g(x)\,\mathrm{d}x f(y)\,\mathrm{d}y = \langle \int_0^1 k(x,\cdot)g(x)\,\mathrm{d}x, f\rangle,$$

also

$$T^*g(x) = \int_0^1 k(y,x)g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Selbstadjungiert wird T also, falls k symmetrisch ist: $k(x,y) = k(y,x)$. (Falls k komplexwertig wäre, käme noch eine Konjugation dazu.)

Präsenzaufgabe 3:

Sei H unendlichdimensionaler Hilbertraum, $K\colon H \to H$ kompakt. Zeige: $0 \in \sigma(K)$.

Lösung:
Wäre $0 \notin \sigma(K)$, so wäre K stetig invertierbar und $I = K^{-1}K$ als Komposition aus stetiger und kompakter Abbildung kompakt, also H endlichdimensional.

Präsenzaufgabe 4:

Zeige für den stetigen linearen Operator $A\colon H \to H$, dass $\lambda \in \sigma(A)$ genau dann, wenn $\overline{\lambda} \in \sigma(A^*)$.

Lösung:
Ein Operator hat genau dann ein stetiges Inverses, wenn dasselbe für seine Adjungierte auch der Fall ist. $\lambda \in \sigma(A)$ genau dann, wenn $\lambda I - A$ kein stetiges Inverses hat. $(\lambda I - A)^* = (\overline{\lambda} I - A^*)$