FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

20.6.2013

Lösungsvorschlag zu den Präsenzaufgaben der 11. Übung

Präsenzaufgabe 1:

Beweise die folgende Behauptung mit Hilfe des Satzes von Baire: Sei $\mathcal{P}$ der Vektorraum der Polynome auf $\mathbb{R}$ und $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathcal{P}$. Dann ist $(\mathcal{P}, \|\cdot\|)$ kein Banachraum.

Lösung:

Angenommen $(\mathcal{P}, \|\cdot\|)$ wäre ein Banachraum. Definieren wir nun

$$\mathcal{P}_j := \{\, p \in \mathbb{R}[X] \,:\, \deg(p) \leq j \,\},$$

die Menge der Polynome auf $\mathbb{R}$ vom Grad höchstens j, so ist

$$\mathcal{P} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_j$$

und nach dem *Satz von Baire* existiert mindestens ein $m \in \mathbb{N}$, ein $p_0 \in \mathcal{P}_m$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(p_0) \subset \mathcal{P}_m$. Betrachten wir aber das Polynom

$$p := p_0 + \varepsilon \frac{x^{j+1}}{2\|x^{j+1}\|}$$

so ist zwar

$$\|p - p_0\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

also $p \in B_\varepsilon(p_0)$ aber $p \notin \mathcal{P}_j$; Widerspruch!

Präsenzaufgabe 2:

Seien E und F zwei Banachräume und (T_n) eine Folge in $L(E, F)$, so dass für jedes $y \in E$ ein Element $Ty \in F$ existiert mit $T_n y \to Ty$ für $n \to \infty$. Zeige, dass für $(x_n) \subset E$ mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$ folgt, dass $T_n x_n \to Tx$ für $n \to \infty$ in F.

Lösung:

Definieren wir den Operator $T : E \longrightarrow F$ durch

$$Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x,$$

so folgt aus dem *Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit*, dass $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$ und man sieht leicht, dass $T \in L(E, F)$. Ist nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \longrightarrow x$ für $n \longrightarrow \infty$, so gilt:

$$\|T_n x_n - Tx\| \leq \|T_n(x_n - x)\| + \|T_n x - Tx\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| \|x_n - x\| + \|Tx_n - Tx\| \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} 0.$$

Präsenzaufgabe 3:

Seien E, F Banachräume, I eine beliebige Indexmenge und $A_i \in L(E, F)$ für alle $i \in I$ mit

$$\sup_{i\in I} \|A_i\|_{L(E,F)} = \infty.$$

Zeige, dass ein $x \in E$ existiert mit

$$\sup_{i \in I} \|A_i x\|_F = \infty.$$

Lösung:
Angenommen es wäre

$$\sup_{i \in I} \|A_i x\|_F < \infty \qquad \forall\, x \in E,$$

so wäre nach dem *Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit* auch $\sup_{i \in I} \|A_i\|_{L(E,F)} < \infty$; Widerspruch!.