FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

27.6.2013

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Lösungsvorschlag zu den Präsenzaufgaben der 12. Übung

Präsenzaufgabe 1:
Sei $A\colon X \to Y$ eine bijektive stetige lineare Abbildung zwischen zwei Banachräumen. Dann ist A stetig invertierbar.

Lösung:
Satz von der offenen Abbildung.

Präsenzaufgabe 2:
Sei E ein Banachraum und $T : E \to E'$ ein linearer Operator mit

$$\langle Tx, x\rangle := Tx(x) \geq 0 \ \forall x \in E.$$

Zeige mit Hilfe des Satzes vom abgeschlossenen Graphen, dass T beschränkt ist.

Lösung:
$x_n \to x$, $Tx_n \to y$, zu zeigen ist $y = Tx$.
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $z \in E$. Wir setzen allgemein an:

$$\begin{aligned}
\alpha\langle y, z\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle Tx_n, \alpha z\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle Tx_n, \alpha z - x + x_n\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle T(x_n - x + \alpha z), x_n - x + \alpha z\rangle + \langle T(x - \alpha z), x_n - x + \alpha z\rangle \\
&\geq \lim_{n\to\infty} \langle T(x - \alpha z), x_n - x + \alpha z\rangle \\
&= \langle Tx + \alpha Tz, \alpha z\rangle = \alpha\langle Tx + \alpha Tz, z\rangle.
\end{aligned}$$

Der Vorfaktor ist noch überzählig, der Term $+\alpha Tz$ sollte beseitigt werden und aus $\geq$ muss noch $=$ werden.
Wir dividieren durch α und erhalten, je nachdem ob α positiv oder negativ gewählt war,

$$\langle y, z\rangle \begin{cases} \geq \\ \leq \end{cases} \langle Tx + \alpha Tz, z\rangle.$$

Im Limes $\alpha \to 0$ ergibt sich daraus

$$\langle y, z\rangle = \langle Tx + 0, z\rangle \qquad \forall z \in E,$$

also $y = Tx$, qed.

Präsenzaufgabe 3:
Sei $A\colon X \to Y$ (mit Banachräumen X, Y) abgeschlossen. Dann ist $ker(A)$ abgeschlossen.

Lösung:
$x_n \to x$ mit $x_n \in ker(A)$. Dann ist $Ax_n = 0$ und somit konvergent gegen 0. Wenn A abgeschlossen ist, bedeutet das aber auch, dass dieser Grenzwert 0 mit dem Funktionswert Ax übereinstimmen muss; also liegt x im Kern.

Präsenzaufgabe 4:

Seien E, F normierte Räume, $D \subset E$ Untervektorraum, $A\colon D \to F$ linear.

a) Ist A stetig und abgeschlossen sowie F vollständig, dann ist D abgeschlossen.

b) Ist A abgeschlossen, so ist auch $A - \alpha I$ abgeschlossen (für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$).

Lösung:

a) x_n sei eine Folge in D mit Grenzwert x. Dann ist x_n Cauchyfolge und A beschränkt, also Ax_n ebenfalls CF. Wegen der Vollständigkeit von F konvergiert daher Ax_n. Dann folgt aus der Abgeschlossenheit von A aber bereits $Ax = \lim_{n\to\infty} Ax_n$, also insbesondere $x \in D$.

b) Sei $x_n \to x$ und es gelte $(A - \alpha I)x_n \to y$, also $Ax_n \to y + \alpha x$. Dann ist $Ax = y + \alpha x$ (Abgeschlossenheit von A) und $(A - \alpha I)x = y + \alpha x - \alpha x = y$. qed.