FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

4.7.2013

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Lösungsvorschlag zu den Präsenzaufgaben der 13. Übung

Präsenzaufgabe 1:

Zeige mithilfe des Zornschen Lemmas den Fortsetzungssatz von Hahn-Banach auch für nicht-separable Räume

Lösung:

vergleiche Heuser: Funktionalanalysis, S. 229f. Die Fortsetzung auf einen Raum mit einer um eins erhöhten Dimension ist möglich wie im Beweis aus der Vorlesung. Danach Lemma von Zorn nachrechnen auf der Menge der stetigen Linearformen mit passender Norm mit $(f, D(f)) \le (g, D(f))$ genau dann, wenn $g|_{D(f)} = f$ und $D(g) \supset D(f)$.

Präsenzaufgabe 2:

Es sei E ein normierter Raum und $E' = L(E, \mathbb{K})$. Zeige, dass

$$\|x\| = \sup_{\substack{x' \in E' \\ \|x'\|=1}} |x'(x)|$$

und dass dieses Supremum sogar angenommen wird.

Lösung:

Offenbar ist nach Definition der Operatornorm

$$|x'(x)| \le \|x'\|\|x\|.$$

Angenommen wird das Supremum, da es zu festem $x \in E$ (oBdA $x \neq 0$) ein stetiges lineares Funktional gibt mit Norm 1 und $x'(x) = \|x\|$. Denn setze auf dem Unterraum $U = \text{span}(x)$ das Funktional φ wie folgt fest: Für alle $v \in U$ existiert ein eindeutiges $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $v = \alpha x$, definiere: $\varphi(v) = \alpha\|x\|$. Da $|\varphi(v)| = |\alpha|\|x\| = \|v\|$ ist es stetig mit Norm 1. Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert eine stetige Fortsetzung x' von φ auf ganz E.

Präsenzaufgabe 3:

E sei ein normierter Raum und sein Dual $E' = L(E, \mathbb{K})$ sei separabel. Zeige: Auch E ist dann separabel.

Lösung:

$\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ sei eine abzählbare dichte Teilmenge der Einheitssphäre in E'. (In einem separablen Raum ist diese wieder separabel.) Wähle zu jedem dieser f_n ein $x_n \in E$ mit $f_n(x_n) > \frac{1}{2}$. (Das geht, da $\|f_n\| = 1$.)
Wir versuchen zu zeigen, dass die Menge $\{x_n\}$ in B_E dicht liegt.
Nimm nun an, x aus der Einheitssphäre von E habe einen Abstand größer als ein fixes $\varepsilon > 0$ von jedem dieser x_n, insbesondere $x \notin \overline{\text{span}\{x_n; n \in \mathbb{N}\}}$. Dann gäbe es (Hahn-Banach! bzw. Folgerung 3.15) ein Funktional f mit Norm 1 und $f(x) = \|x\| = \varepsilon$ sowie $f(x_n) = 0$ für alle n. Es wäre dann

$$\|f_n - f\| \ge |f_n(x_n) - f(x_n)| = |f_n(x_n) - 0| \ge \frac{1}{2},$$

im Widerspruch dazu, dass die f_n dicht liegen in der Einheitssphäre von E'.

Präsenzaufgabe 4:

Seien $a, b \in [0,1]$ mit $a \neq b$, $X := \{f : [0,1] \to \mathbb{R}, f \text{ beschränkt}\}$ versehen mit der Supremumsnorm und $U := \{f \in X : f(a) = f(b)\} \subset X$. Finde ein stetiges lineares Funktional auf $F \in L(U, \mathbb{R})$, das unendlich viele stetige und normerhaltende lineare Fortsetzungen besitzt.

Lösung:

Betrachte $\Phi(f) = f(a)$ (Norm 1, wird für konstante 1-Funktion angenommen) und als Fortsetzung $\Phi_\lambda(f) = \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$.