FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

11.7.2013

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Lösungsvorschlag zu den Präsenzaufgaben der 14. Übung

Präsenzaufgabe 1:

Beweise: Räume mit endlichdimensionalem Dualraum sind endlichdimensional.

Lösung:

Diese Räume sind Teilräume ihres Biduals, der aber als Dual eines endlichdimensionalen Raumes endlichdimensional ist. (Eine Basis lässt sich explizit konstruieren. Nutze zu gegebener Basis die duale Basis; siehe Lineare Algebra.)

Präsenzaufgabe 2:

Seien X, Y Banachräume, $A \in L(X,Y)$. Zeige:

$$A'' \circ j_X = j_Y \circ A$$

wobei $j_X : X \to X''$, $j_Y : Y \to Y''$ die kanonischen Abbildungen sind.

Lösung:

Wir schaufeln mithilfe der Definition der Adjungierten und der kanonischen Injektion in den Bidual innerhalb der Dualitätsklammern lustig Abbildungen hin und her. In $\langle \cdot, \cdot \rangle_{A,B}$ bezeichen A und B die Räume, in denen das erste bzw. zweite Argument jeweils liegen. (Sinnvoll wird der Ausdruck natürlich nur, wenn A der Dual von B ist.) Diese Schreibweise macht die Abbildungen, mit denen wir es hier zu tun haben, relativ leicht handhabbar.
Wir wollen die Gleichheit von Abbildungen von X nach Y'' untersuchen. Wir geben uns deshalb ein beliebiges $x \in X$ vor und untersuchen die Gleichheit von $A'' \circ j_X(x)$ und $j_Y(A(x))$. Da diese nun selbst wieder Abbildungen sind, bedeutet, ihre Gleichheit zu untersuchen, nachzuweisen, dass sie in der Auswertung auf jedem $y' \in Y'$ übereinstimmen (Y' ist nämlich der Definitionsbereich dieser Abbildungen). Seien also $x \in X$ und $y' \in Y'$ beliebig vorgegeben. Dann ist

$$\langle A''(j_X(x)), y' \rangle_{Y'',Y'} = \langle j_X(x), A'y' \rangle_{X'',X'} = \langle A'y', x \rangle_{X',X} = \langle y', Ax \rangle_{Y',Y} = \langle j_Y(Ax), y' \rangle_{Y'',Y'}.$$

Präsenzaufgabe 3:

Jeder endlichdimensionale Banachraum ist reflexiv.

Lösung:

Durch Angabe einer Basis lässt sich zeigen: $\dim X = \dim X' = \dim X''$. Da zugleich (mit der kanonischen Abbildung j_X gilt, dass X (genauer: $j_X(X)$) ein Unterraum von X'' ist: $j_X(X) \subset X''$, folgt augenblicklich Reflexivität.

Präsenzaufgabe 4:

Bestimme die Dualräume von c_0 und l^1 und zeige, dass $(l^\infty)'$ nicht mit l^1 übereinstimmt.

Lösung:

Jedes Element ξ von l^1 definiert durch $\Xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n$ ein stetiges lineares Funktional auf c_0.
Sei umgekehrt $f \in (c_0)'$. Dann ist $f(x) = f(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} f(e_n) x_n$. Dabei ist $(f(e_n))_n$ eine summierbare Folge, da f stetig ist und die Folge $(\sum_{n=1}^{N} \operatorname{sgn}(f(e_n)) e_n)_N$ in c_0 liegt, also $\sum_{n=1}^{\infty} |f(e_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sgn}(f(e_n)) f(e_n) \leq \sup_N \sum_{n=1}^{N} \operatorname{sgn}(f(e_n)) f(e_n) = f(\sum_{n=1}^{N} \operatorname{sgn}(f(e_n)) e_n) \leq \|f\| \|\sum_{n=1}^{N} \operatorname{sgn}(f(e_n)) e_n)\| \leq \|f\| \cdot 1$.
Demnach stimmen $(c_0)'$ und l^1 überein.
Der Dual von l^1 ist l^∞. Offenbar definiert jede beschränkte Folge ein lineares stetiges Funktional auf l^1.
Umgekehrt wird durch $a_n = f(e_n)$ wieder eine (beschränkte, da $|f(e_n)|$ durch die Norm von f beschränkt ist) Folge definiert. Es gilt $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ (wegen Linearität für endliche Linearkombinationen der e_n und wegen der Stetigkeit dann auch für allgemeines x).
$(l^\infty)'$ ist nun allerdings von l^1 verschieden. Wir beobachten dazu, dass eine Hahn-Banach-Fortsetzung des auf dem Unterraum c der konvergenten Folgen definierten $\lim\colon x \mapsto \lim_{n\to\infty} x_n$ ein stetiges lineares Funktional ist, es allerdings keine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, sodass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = \lim x_n$ für alle $x \in c$.
Denn $\lim_{n\to\infty} e_n = 0$, also müsste $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \delta_{kn} = a_n = 0$ gelten und damit $a = 0$, aber es gibt konvergente Folgen mit von null verschiedenem Grenzwert.