FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

18.7.2013

Lösungsvorschlag zu den Präsenzaufgaben der 15. Übung

Präsenzaufgabe 1:

Sei X endlichdimensional. Zeige: $x_n \rightharpoonup x$ genau dann, wenn $x_n \to x$.

Lösung:

Starke Konvergenz impliziert immer schwache: Für jedes $f \in X'$ gilt $|\langle f, x_n - x\rangle| \leq \|f\|\|x_n - x\| \to 0$.
Für die Rückrichtung verwende als Funktionale die Koordinatenprojektionen (bzgl. einer beliebigen Basis. Das liefert Konvergenz in jeder einzelnen Komponente und damit (endl.dim!) Konvergenz.

Präsenzaufgabe 2:

X sei normierter Raum und $M \subset X$ sei schwach abgeschlossen. Zeige: M ist abgeschlossen.

Lösung:

Sei x_n Folge in M mit Grenzwert x. Dann konvergiert x_n auch schwach gegen x und wegen der schwachen Abgeschlossenheit ist $x \in M$, qed.

Präsenzaufgabe 3:

Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $u_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$i.) u_n(x) = \sin(n\pi x), \quad ii.) u_n(x) = \sin(n/x), \quad iii.) u_n(x) = \sin(1/nx).$$

Untersuche die vorgelegten Funktionenfolgen auf schwache Konvergenz in $L^p(0,1)$ für $1 < p < \infty$.

Lösung:

Der Dualraum von L^p ist L^q mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, d.h. die stetigen linearen Funktionale F auf L^p lassen sich durch $F(u) = \int f(x)u(x)\,dx$ mit einer Funktion $f \in L^q$ darstellen. Statt alle Funktionen aus L^q zu untersuchen, genügt auch eine dichte Teilmenge. (Also ist es uns möglich, mit C_0^∞ zu arbeiten. Das ermöglicht partielle Integration.)

i) Sei $f \in C^\infty$. Es ist
$$\int f(x)\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi n}\int_0^1 f'(x)\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x \to 0,$$
also konvergiert diese Folge schwach gegen 0. Man sieht auch, dass dasselbe für andere Intervalle ebenso funktioniert.

ii) Sei $f \in C_0^\infty(0,1)$, mit Träger in $[a,b]$.
$$\int_0^1 f(x)\sin(n/x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\sin(n/x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} f(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2}\sin(nz)\,\mathrm{d}z$$
Nun ist $f(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2} \in L^q(\frac{1}{b},\frac{1}{a})$. (Sowohl f als C_0^∞-Funktion als auch $\frac{1}{z^2}$ (da das Intervall echten Abstand von 0 hat) sind beschränkt.)
Die schwache Konvergenz gegen 0 folgt nun aus Teil i), da $\sin(nz) \rightharpoonup 0$.

iii) Diese Funktionenfolge konvergiert punktweise gegen 0 und ist beschränkt (auf einem beschränkten Intervall), mit dem Satz von Lebesgue folgt Konvergenz gegen 0, erst recht also auch schwache Konvergenz.