FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

18.4.2013

Lösungsvorschlag zu den Präsenzaufgaben der 2. Übung

Präsenzaufgabe 1:

Gilt in metrischen Räumen, dass

$$\overline{B_\varepsilon(x)} = \{y; d(x,y) \leq \varepsilon\}?$$

Lösung:

Nein, nicht notwendig. Betrachte in der diskreten Metrik die offene Kugel mit Radius 1. Sie ist gleich ihrem Abschluss, aber die Kugel mit $d(x,y) \leq 1$ ist der ganze Raum.

Präsenzaufgabe 2:

Zeige: Die Räume l^1 und $C(K)$ (Raum der stetigen Funktionen von K nach $\mathbb{R}$, wobei hier $K \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall sei) sind separabel.
Hinweis: Verwende den Satz von Weierstrass:Die Menge der Polynome liegt dicht in $C(K)$.

Lösung:

l^1: Betrachte die Menge der Folgen $(q_n)_n$ mit $q_n \in \mathbb{Q}$ und $q_n = 0$ für $n > N$ mit einem N. Diese Menge ist abzählbar. Sie ist auch dicht: Sei $\varepsilon > 0$. Zu $(x_n) \in l^1$ gibt es nun $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=N}^\infty |x_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ und zu jeder der Zahlen x_k für $k = 1, \ldots, N$ gibt es ein rationales q_k mit $|x_k - q_k| < \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{2^k}$. Setze $q = (q_k)_k = (q_1, q_2, \ldots, q_N, 0, 0, 0, \ldots)$. Dann liegt q in der eben beschriebenen Menge und

$$d(q,x) = \sum_{k=1}^\infty |x_k - q_k| = \sum_{k=1}^N |x_k - q_k| + \sum_{k=N+1}^\infty |x_k - 0| \leq \sum_{k=1}^N \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{2^k} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Demnach ist die beschriebene Menge dicht.
Für $C(K)$ verwenden wir, wie der Hinweis es suggeriert, die Menge der Polynome. Diese ist noch nicht abzählbar, also gehen wir, wie eben, über zur Menge der Polynome mit rationalen Koeffizienten, die dan abzählbar ist.
Wir zeigen, dass es in beliebig kleiner Entfernung $\varepsilon > 0$ einer Polynomfunktion $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ ein Polynom $q(x) = \sum_{k=0}^n q_k x^k$ mit $q_k \in \mathbb{Q}$ gibt. Alle Monome sind stetig und damit beschränkt auf K. Sei $C = \max\{\|x^0\|_\infty, \ldots, \|x^n\|_\infty\}$. Wir wählen nun zu a_k jeweils eine rationale Zahl q_k mit $|a_k - q_k| < \frac{\varepsilon}{2C \cdot 2^k}$. Dann ist

$$\|p - q\|_\infty \leq \sum_{k=0}^n |a_k - q_k| \|x^k\|_\infty \leq C \sum_{k=0}^n |a_k - q_k| \leq C \sum_{k=0}^n \frac{\varepsilon}{2C \cdot 2^k} \leq \frac{1}{2}\varepsilon \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2^k} = \varepsilon.$$

Präsenzaufgabe 3:

Wir betrachten den Vektorraum c_{00} der „abbrechenden Folgen“, also derjenigen Folgen $(x_n)_n$ reeller Zahlen, für die ein N existiert, sodass $x_n = 0$ für $n > N$.

a) Zeige: Mit $\|x\| = \max_i |x_i|$ wird c_{00} zu einem normierten Raum.

b) Ist c_{00} vollständig?

c) Betrachte die Abbildung

$$f\colon c_{00} \to \mathbb{R}$$
$$f((x_n)_n) = \sum_{k=1}^{\infty} kx_k.$$

Ist f linear? Stetig?

d) Hast du in c) daran gedacht, f auch auf Wohldefiniertheit zu untersuchen?

Lösung:

a) c_{00} ist abgeschlossen bezüglich Summenbildung und Multiplikation mit Skalaren. Außerdem sind alle seine Elemente beschränkte Folgen, die Norm ist gleich der Supremumsnorm. Damit ist c_{00} ein Unterraum von l^∞, also insbesondere auch ein normierter Raum.

b) Vollständig ist c_{00} nicht. Um das zu sehen, betrachten wir die Folge

$$((\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots))_n.$$

Sie liegt in c_{00} und ist eine Cauchyfolge. Ihr Grenzelement in c_0 bzw. l^∞ wäre $(\frac{1}{k})_k$, was aber in c_{00} nicht enthalten ist.

c) Linearität ist klar. (Definition einsetzen.) Stetig ist die Abbildung nicht. Betrachte $\frac{1}{n}e_n$ (wobei e_n die Folge sei mit dem Wert 1 an $n$ter Stelle und 0 sonst). Dann konvergiert diese Folge gegen 0: $\|\frac{1}{n}e_n\| = \frac{1}{n} \to 0$, aber $f(\frac{1}{n}e_n) = 1 \not\to 0 = f(0)$.

d) Ja, hoffentlich. Da es sich um abbrechende Folgen handelt, ist der Funktionswert stets eine endliche reelle Zahl.