FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

25.4.2013

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Lösungsvorschlag zu den Präsenzaufgaben der 3. Übung

Präsenzaufgabe 1:
Beweise mit Hilfe des *Banach'schen Fixpunktsatzes* die folgende Aussage. Sei $k : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und mit γ definiert durch

$$\gamma := \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |k(x,y)|\, dy$$

gelte $\gamma < 1$. Dann hat die Integralgleichung

$$f(x) - \int_0^1 k(x,y) f(y)\, dy = g(x), \quad x \in [0,1]$$

zu jedem $g \in C([0,1])$ genau eine Lösung $f \in C([0,1])$. Zudem gilt $\|f\|_\infty \leq (1-\gamma)^{-1}\|g\|_\infty$.

Lösung:
$\big(C^0([0,1]), \|.\|_\infty\big)$ ist vollständig. Definieren wir nun die Abbildung T auf $C^0([0,1])$ durch

$$f \longmapsto Tf \quad \text{mit} \quad Tf(x) = g(x) + \int_0^1 k(x,y) f(y)\ dy \quad \forall\, x \in [0,1]\,,$$

so gilt

$$T : C^0([0,1]) \longrightarrow C^0([0,1]),$$

da Tf für jedes $f \in C^0([0,1])$ als Komposition stetiger Funktionen stetig ist. Außerdem gilt für $f, h \in C^0([0,1])$

$$\begin{aligned}
\|Tf - Th\|_\infty &= \sup_{x\in[0,1]} \left| g(x) + \int_0^1 k(x,y) f(y)\ dy - g(x) - \int_0^1 k(x,y) h(y)\ dy \right| \\
&= \sup_{x\in[0,1]} \left| \int_0^1 k(x,y) \cdot \Big(f(y) - h(y)\Big)\ dy \right| \\
&\leq \|f-h\|_\infty \cdot \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |k(x,y)|\ dy \leq q \cdot \|f-h\|_\infty
\end{aligned}$$

mit $q \in [0,1)$. Also ist T auch eine Kontraktion und erfüllt damit die Voraussetzungen des *Banach'schen Fixpunktsatzes*. Aus diesem folgt dann die Existenz eines $f \in C^0([0,1])$ mit

$$Tf = f \iff g(x) = f(x) - \int_0^1 k(x,y) f(y) dy \quad \forall\, x \in [0,1]\,.$$

Für dieses f gilt:

$$\begin{aligned}
\|f\|_\infty &= \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \\
&= \sup_{x\in[0,1]} \left| g(x) - \int_0^1 k(x,y) f(y) dy \right| \\
&\leq \sup_{x\in[0,1]} |g(x)| + \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |k(x,y)| \cdot \|f\|_\infty\ dy \leq \|g(x)\|_\infty + \gamma \cdot \|f\|_\infty
\end{aligned}$$

und damit

$$\|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty + \gamma \cdot \|f\|_\infty \iff \|f\|_\infty \leq (1-\gamma)^{-1}\, \|g\|_\infty\,.$$

Präsenzaufgabe 2:

Betrachte die folgenden Abbildungen in $\mathbb{R}$. Überprüfe die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes und untersuche die Existenz von Fixpunkten.

a) $T\colon M \to M, M = (0,1), Tx = \frac{x}{2}$.

b) $T\colon M \to M,\ M = \mathbb{R},\ Tx = \frac{\pi}{2} + x - \arctan(x)$.

c) $T\colon M \to N,\ M = [0,1],\ N = [2,3]$.

d) $T\colon M \to M,\ M = \emptyset$.

e) $T\colon M \to M,\ M = [-1,1],\ Tx = \frac{1}{3}e^x$

Lösung:

a) M ist nicht vollständig. Da $x = \frac{x}{2}$ auch keine Lösung in $(0,1)$ hat, hat die Abbildung keinen Fixpunkt.

b) $x = \frac{\pi}{2} + x - \arctan(x)$ ist äquivalent zu $\arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ - das ist nicht lösbar. Die Nichtanwendbarkeit des Banachschen Fixpunktsatzes liegt daran, dass T keine strikte Kontraktion ist: Es gilt zwar

$$Tx - Ty = x - y - (\arctan(x) - \arctan(y)) < x - y,$$

aber

$$T(x+1) - Tx = 1 - (\arctan(x+1) + \arctan(x)) = 1 - \frac{1}{1+\xi^2}$$

für ein $\xi \in (x, x+1)$ und $\sup_{\xi\in\mathbb{R}} 1 - \frac{1}{1+\xi^2} = 1$. Es gibt daher kein $k < 1$ mit $|Tx - Ty| \leq k|x-y|$.

c) Da $Tx \in [2,3]$ und $x \in [0,1]$ und $[0,1] \cap [2,3] = \emptyset$, gibt es hier keinen Fixpunkt. Der Banachsche Fixpunktsatz ist nicht anwendbar, weil es sich nicht um eine Selbstabbildung handelt.

d) Kann es ja nicht geben. M ist leer.

e) M ist vollständig. T bildet $M \neq \emptyset$ auf sich selbst ab: $Tx \geq \frac{1}{3}e^{-1} > 0 \geq -1$ und $Tx \leq \frac{1}{3}e^1 = \frac{e}{3} \leq 1$, außerdem ist T Lipschitz-stetig mit Konstante $\frac{e}{3} < 1$ (weil die Ableitung durch diese Zahl beschränkt ist) und damit kontrahierend. Hier erlaubt der Banachsche Fixpunktsatz also endlich, auf die Existenz eines Fixpunkts zu schließen.

Präsenzaufgabe 3:

Zeige: Es gibt genau eine auf $(0,1)$ gleichmäßig stetige Funktion f, die

$$f(x) - \int_0^1 \frac{\sin(xy)}{2+x+y} f(y)\ \mathrm{d}y = \log(x+3)\cos(xe^x) \qquad \forall x \in (0,1)$$

erfüllt. Kannst du eine Abschätzung für $\sup_{x\in(0,1)} |f(x)|$ angeben?

Lösung:

Gleichmäßig stetig auf $(0,1)$ ist dasselbe wie stetig auf $[0,1]$, dann Präsenzaufgabe 1 anwenden.

Präsenzaufgabe 4:

Zeige anhand eines einfachen Gegenbeispiels, dass man in den Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes nicht auf Vollständigkeit verzichten kann.

Lösung:
siehe Präsenzaufgabe 2a)

Der Fachschaftsrat lädt euch ein zum

SPIELEABEND

am **Donnerstag, dem 2. Mai 2013, ab 18:03 Uhr** im LuDi und in der Fachschaft.
Für Knabbereien und eine kleine Sammlung an Brett- und Kartenspielen werden wir sorgen. Getränke sowie eigene Spiele könnt ihr gerne selbst mitbringen. Wir freuen uns auf euch!
Euer Fachschaftsrat Mathematik