FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

3.5.2013

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Lösungsvorschlag zu den Präsenzaufgaben der 4. Übung

Präsenzaufgabe 1:
Welche Mengen sind in $\mathbb{R}^n$ relativkompakt?

Lösung:
Es sind genau die beschränkten Mengen. Sei dazu zunächst $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge. Dann folgt aus dem *Satz von Bolzano-Weierstrass*, dass jede Folge in M eine konvergente Teilfolge hat (Wie genau?). Ist nun andererseits $M \subset \mathbb{R}^n$ nicht beschränkt, so können wir eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ konstruieren, die keine konvergente Teilfolge besitzt. Dazu wählen wir $x_1 \in M$ beliebig. Anschließend sei x_2 ein Element in M, dass vom Ursprung 0 wenigstens um 1 weiter entfernt ist als x_1 und fahren so fort. Das bedeutet: Sind bereits j Elemente $x_1, \dots, x_j$ gewählt, so nehmen wir für x_{j+1} ein Element in M, dass vom Ursprung 0 wenigstens um 1 weiter entfernt ist als x_j (möglich, da andernfalls M beschränkt wäre). Nach Konstruktion ist dann

$$d(x_{j+1}, x_k) \geq d(x_{j+1}, 0) - d(x_k, 0) \geq 1 \quad \forall\, j \in \mathbb{N}\, \forall\, 0 \leq k < j$$

und somit keine Teilfolge konvergent.

Präsenzaufgabe 2:
Untersuche die folgenden Mengen auf relative Kompaktheit in $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$:

$$M_1 = \{f \in C([0,1]) \mid f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}_0\},$$

$$M_2 = \{f \in C^1([0,1]) \mid |f(x)| \leq x,\ |f'(x)| \leq x\ \forall\, x \in [0,1]\},$$

$$M_3 = \{f \in C^1([0,1]) \mid f(0) = 0,\ |f'(x)| \leq 2 + \sin(\pi x)\ \forall\, x \in [0,1]\}.$$

Lösung:

(1) Angenommen M_1 wäre relativ kompakt, dann hätte die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n(x) = x^n$ eine in $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ konvergente Teilfolge. Folglich gäbe es ein $f \in C([0,1])$, so dass

$$\|f_{n_k} - f\|_\infty \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

und somit

$$x^{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} f(x) \text{ gleichmäßig für alle } x \in [0,1].$$

Tatsächlich gilt aber:

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = \begin{cases} 0;\ x \in [0,1) \\ \\ 1;\ \text{sonst} \end{cases}$$

und somit

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_{n_k}(x) - f(x)| = \lim_{k\to\infty} 1 = 1 \neq 0.$$

Da M_1 nicht relativ kompakt ist, ist M_1 auch nicht kompakt.

(2) Wir nutzen den *Satz von Arzela-Ascoli*:

Seien (X, d_x) ein kompakter metrischer und (Y, d_y) ein vollständiger metrischer Raum. Eine Teilmenge F von $(C(X,Y), d_C)$ mit

$$d_C(f,g) := \sup_{x\in X} d_y(f(x), g(x)),$$

ist genau dann relativ kompakt, wenn gilt:

(a) *Für alle $x \in X$ ist $F(x) = \{f(x) : f \in F\}$ relativ kompakt.*

(b) *F ist gleichmäßig gleichgradig stetig, d. h.*

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, f \in F \quad \forall\, x,y \in X: \quad d_x(x,y) < \delta \implies d_y(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Damit wagen wir uns an $M_2 \subset C([0,1], \mathbb{R})$ und folgern:

(a) Für alle $x \in [0,1]$ ist $M_2(x) = \{f(x) : f \in M_2\}$ relativ kompakt. Ist nämlich $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $M_2(x)$ (d. h. $x_n := f_n(x)$ für ein $f_n \in M_2$) so gilt:

$$|x_n| = |f_n(x)| \leq x \leq \max_{x\in[0,1]} x = 1\,.$$

Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und besitzt daher nach *Bolzano-Weierstraß* eine konvergente Teilfolge.

(b) M_2 ist gleichgradig stetig. Denn zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta := \varepsilon$ und erhalten für $f \in M_2$ und $x, y \in [0,1]$ mit $|x-y| < \delta$:

$$|f(x) - f(y)| \leq \max_{\xi\in[0,1]} |f'(\xi)| \cdot |x-y| \leq \max_{\xi\in[0,1]} \xi \cdot \delta = \varepsilon.$$

Also ist M_2 nach *Arzela-Ascoli* relativ kompakt.

(3) Analog wie in (2) sieht man auch hier, dass M_3 relativ kompakt ist.

Präsenzaufgabe 3:

Zeige: Im Raum $L^p([0,1])$ (den wir als Vervollständigung des Raumes stetiger Funktionen eingeführt haben) gilt die Minkowski'sche Ungleichung.

Lösung:

Wir verwenden, dass wir bereits wissen, dass die Ungleichung für stetige Funktionen gilt. Seien $f, g \in L^p([0,1])$ und f_n, g_n Folgen stetiger Funktionen, die f bzw. g in der L^p-Norm approximieren. Wenn $f_n \to f$ und $g_n \to g$, konvergiert auch $f_n + g_n \to f + g$. Es gilt ebenfalls $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$ (da $|\|f_n\|_p - \|f\|_p| \leq \|f_n - f\|_p \to 0$ nach der Dreiecksungleichung) und damit erhalten wir

$$\|f+g\|_p = \lim_{n\to\infty} \|f_n + g_n\|_p \leq \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p + \|g_n\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Dieses Vorgehen ist typisch, wenn man (Un)gleichungen auf Räume übertragen will, die als Vervollständigung definiert sind. Man muss dabei unbedingt darauf achten, dass die Terme tatsächlich konvergieren, wenn man in der gegebenen Norm approximiert. (Was in unserem Fall gut funktioniert, da diese Terme ja gerade Ausdrücke in der Norm sind.)

Präsenzaufgabe 4:

Zeige: Für $a < b \in \mathbb{R}$ ist

$$\overline{(C^\infty([a,b]), \|\cdot\|_2)} = \overline{(C([a,b]), \|\cdot\|_2)}.$$

Hinweis: Analysis III, Blatt 6, HA 1.

Lösung:

Da $C^\infty([a,b]) \subseteq C([a,b])$ ist natürlich auch $\overline{(C^\infty([a,b]), \|\cdot\|_2)} \subseteq \overline{(C([a,b]), \|\cdot\|_2)}$. Sei nun andersherum $f \in C([a,b])$. Dann definieren wir

$$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \phi(x) := \begin{cases} c \exp\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right) & ;\ |x| < 1 \\ 0 & ;\ \text{sonst} \end{cases},$$

wobei $c \in (0, \infty)$ so gewählt wird, dass

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, dx = 1\,.$$

Setzen wir $\phi_\delta = \delta^{-1} \phi\left(\frac{x}{\delta}\right)$ und definieren die Faltung von ϕ_δ und f durch

$$\left(\phi_\delta * f\right)(x) := \int_{\mathbb{R}} \phi_\delta(x-y) f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} \phi_\delta(y) f(x-y)\, dy$$

folgt nach Analysis III, Blatt 6, Hausaufgabe 1:

- Für δ passend gewählt ist $\phi_\delta \in C_0^\infty([a,b])$ und damit das Integral wohldefiniert.
- In der $\|\cdot\|_2$-Norm gilt: $\left(\phi_\delta * f\right)(x) \xrightarrow{\delta \to 0} f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Folglich können wir jede stetige Funktion durch unendlich oft differenzierbare Funktionen approximieren, d. h.

$$(C([a,b]), \|\cdot\|_2) \subseteq \overline{(C^\infty([a,b]), \|\cdot\|_2)} \quad \Longrightarrow \quad \overline{(C([a,b]), \|\cdot\|_2)} \subseteq \overline{(C^\infty([a,b]), \|\cdot\|_2)}\,.$$