FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

16.5.2013

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Lösungsvorschlag zu den Präsenzaufgaben der 6. Übung

Präsenzaufgabe 1:

Was ist an der folgenden Formulierung des Satzes über die Neumannsche Reihe falsch?
Es sei X ein normierter Raum, Y ein metrischer Raum, A eine lineare Abbildung von X nach Y. Dann ist $I - A$ invertierbar und $(I - A)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} A^n$.

Lösung:

In metrischen Räumen ist Linearität Quatsch. Damit A^n definiert ist (und I), müssen X und Y übereinstimmen. Die Norm von A muss klein sein (kleiner als 1); für genauere Voraussetzungen siehe Hausaufgaben. Damit man (wie im Beweis geschehen) von absoluter Konvergenz auf Konvergenz der Reihe schließen kann, muss darüberhinaus X vollständig sein, also $X = Y$ ein Banachraum. Achso: Außerdem muss die Reihe bei 0 anfangen.

Präsenzaufgabe 2:

Löse die Integralgleichung

$$u(s) - \int_0^1 st\ u(t)dt = \sin(\pi s),\ \ s \in [0,1],\ \ u \in C([0,1]).$$

Lösung:

Wir wollen die Neumannsche Reihe verwenden und definieren dazu den Operator

$$\begin{aligned} A\colon C([0,1]) &\to C([0,1]) \\ u &\mapsto \{s \mapsto s \cdot \int_0^1 tu(t)\ \mathrm{d}t\}. \end{aligned}$$

Dann ist A wohldefiniert (das Bild ist wieder stetig) und linear (klar) sowie stetig, denn

$$|Au(s)| \le |s|\|u\| \int_0^1 t\ \mathrm{d}t \le \frac{1}{2}\|u\| \qquad \forall u \in C([0,1]),$$

also $\|A\| \le \frac{1}{2}$.
Mit Hilfe der Neumannschen Reihe lässt sich daher $I - A$ invertieren mit $(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$ und für die gesuchte Funktion u gilt

$$u(s) = (I - A)^{-1} \sin(\pi s).$$

Für die explizite Berechnung bestimmen wir zunächst A^n. Durch Ausprobieren gelangt man zu der Vermutung:

$$A^n u(s) = s \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \int_0^1 tu(t)\ \mathrm{d}t.$$

Für $n = 1$ stimmt das, wie man an der Definition abliest.

$$\begin{aligned} A^n u(s) &= s \int_0^1 tA^{n-1}u(t)\ \mathrm{d}t \\ &= s \int_0^1 tt \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \int_0^1 xu(x)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \\ &= s \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \int_0^1 xu(x)\ \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}
u(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} A^n \sin(\pi s) \\
&= A^0 \sin(\pi s) + s \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \int_0^1 x \sin(\pi x) \, \mathrm{d}x \\
&= \sin(\pi s) + \frac{3}{2} \int_0^1 x \sin(\pi x) \, \mathrm{d}x \\
&= \sin(\pi s) + \frac{3}{2\pi} s.
\end{aligned}$$

Präsenzaufgabe 3:

Betrachte den Einbettungsoperator von $L^p(\Omega)$ nach $L^q(\Omega)$.
Ist er linear?
Unter welchen Bedingungen an p, q, Ω wird er stetig?

Lösung:

Linearität ist klar. Stetigkeit mit der Hölderschen Ungleichung für $q < p$ und Ω mit endlichem Maß. Unbeschränktheit folgt ansonsten aus geeigneten Gegenbeispielen. (Auf $\mathbb{R}$ z.B. $\frac{1}{x^\alpha}$, $\frac{1}{q} > \alpha > \frac{1}{p}$. Für $p < q$ Ähnliches auf $(0, 1)$.)

Präsenzaufgabe 4:

X sei ein normierter Raum.
Zeige: Genau dann ist jede lineare Abbildung von X nach $\mathbb{R}$ stetig, wenn $\dim X < \infty$ ist.

Lösung:

Wenn X endlichdimensional ist, sind alle linearen Abbildungen darauf stetig, siehe Skript.
Sei X unendlichdimensional. Dann seien x_n mit Norm 1 in einer Basis enthalten und das Bild von $x = \sum_{i \in I} a_i x_i$ definiert als $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n n$. Dann ist diese Abbildung linear, aber die Folge $\frac{x_n}{n}$ konvergiert im Gegensatz zu ihrem Bild, das stets Norm 1 hat, gegen 0.