FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

23.5.2013

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Lösungsvorschlag zu den Präsenzaufgaben der 7. Übung

Präsenzaufgabe 1:

Zeige: Sei X normierter Raum und M ein endlichdimensionaler Unterraum. Dann gibt es zu jedem $x \in X$ ein $z \in M$ mit $\|x - z\| = \inf_{y \in M} \|x - y\|$.

Lösung:

Sei $x \in X$ vorgegeben und $d := \operatorname{dist}(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\|$. Dann gibt es eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} \|x - y_n\| = d$, die wegen $\|y_n\| \leq \|x - y_n\| + \|x\|$ beschränkt ist. Sie enthält eine konvergente Teilfolge. (Wir nennen diese wieder (y_n) und ihren Grenzwert z.) Darüberhinaus ist M als endlich-dimensionaler normierter Raum abgeschlossen, sodass $z := \lim\limits_{n \to \infty} y_n \in M$ und

$$\inf_{y \in M} \|x - y\| = \lim_{n \to \infty} \|x - y_n\| = \|x - z\|.$$

Präsenzaufgabe 2:

Betrachte (für passend klein gewähltes $\varepsilon > 0$) auf $l^2(\mathbb{R})$ und dem Unterraum

$$X = \{x;\ \text{für nur endlich viele } i \text{ gilt } x_i \neq 0\}$$

den Shiftoperator

$$(Tx)_i = \begin{cases} 0 & i = 1 \\ \varepsilon x_{i-1} & i > 1. \end{cases}$$

Was geht beim Anwenden des Satzes über die Neumannsche Reihe schief?

Lösung:

Hier existiert die Inverse $(I - T)^{-1}$ nicht. Zwar ist

$$\|Tx\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varepsilon x_n|^2 \right)^{1/2} = \varepsilon \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2} = \varepsilon \cdot \|x\|,$$

also $\|T\| = \varepsilon$ und die Neumann'sche Reihe für $\varepsilon < 1$ daher existent ($(I - T)^{-1}$ lässt sich als Abbildung: $l^2 \to l^2$ bilden), aber

$$(I - T)^{-1} e_1 = \sum_{n=0}^{\infty} T^n e_1 = I e_1 + T e_1 + T^2 e_1 + \ldots = (\varepsilon^{k-1})_{k \in \mathbb{N}} \notin X.$$

Der Knackpunkt liegt bei dem Unterraum $X \subset l^2(\mathbb{R})$. Dieser ist nämlich nicht abgeschlossen und daher auch nicht vollständig. Betrachte dazu die Folge $(x^i)_{i \in \mathbb{N}} \subset X$ mit

$$x_n^i := \begin{cases} n^{-1} & : \ n < i \\ 0 & : \ n \geq i. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\|x^i - (\frac{1}{n})_n\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x_n^i - \frac{1}{n})^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{n=i}^{\infty} (\frac{1}{n})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \qquad \text{für } i \to \infty,$$

also $x^i \longrightarrow (\frac{1}{n})_n \notin X$ für $i \to \infty$.

Präsenzaufgabe 3:

Gegeben sei $f : (c_0, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_n$$

für alle $x = (x_n) \in c_0$.

$a.$) Zeige: $f \in (c_0, \|\cdot\|_\infty)'$.

$b.$) Berechne die Operatornorm von f. Nimmt f seine Operatornorm in einem $x \in c_0$ an?

Lösung:

$a.$) Sei $x := (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \subset l^\infty$. Dann ist f wegen

$$|f(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_n\right| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1 \cdot \|x\|_\infty$$

wohldefiniert, beschränkt und wegen

$$f(\alpha x + \beta y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} y_n = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

linear und daher insbesondere (linear und beschränkt) stetig.

$b.$) Nach Teilaufgabe $a.$) ist

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| \leq 1.$$

Betrachten wir nun die Folgen $x^k := (x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_n^k = \begin{cases} 1 & : \ n \leq k \\ 0 & : \ n > k \end{cases}$$

folgt

$$f(x^k) = \sum_{n=1}^{k} 2^{-n} = \frac{1 - 2^{-k-1}}{1 - 2^{-1}} - 1 = 1 - 2^{-k} \longrightarrow 1 \quad \text{für} \quad k \to \infty$$

und somit

$$\|f\| = 1.$$

f nimmt die Norm in keinem $x \in c_0$ an, denn dazu müsste f die Norm auf einem x mit Norm 1 annehmen; damit aber für ein $x \in l^\infty$ mit $\|x\| = 1$ auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_n = 1$$

gilt, muss (wegen $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$) dann $x_n = 1$ sein für alle n. Diese Folge konvergiert aber nicht gegen 0, liegt also nicht in c_0.