FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

6.6.2013

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Lösungsvorschlag zu den Präsenzaufgaben der 9. Übung

Präsenzaufgabe 1:
Sei $F\colon W^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ stetig und linear. Zeige: Es gibt $u, v \in L^2(\Omega)$, sodass für alle $w \in W^{1,2}(\Omega)$

$$F(w) = \frac{1}{2}\int_\Omega wu \,\mathrm{d}x + \frac{1}{42}\int_\Omega vw' \,\mathrm{d}x.$$

Lösung:
Satz von Riesz-Frechet: Es gibt $\widetilde{u} \in W^{1,2}(\Omega)$ mit $F(w) = \langle w, \widetilde{u}\rangle = \int w\widetilde{u} + \int w'\widetilde{u}'$. Wähle $u = 2\widetilde{u}$, $v = 42\widetilde{u}'$.

Präsenzaufgabe 2:
Sei H Hilbertraum und $S \subset H$ ein Orthonormalsystem. Zeige: S ist ONB genau dann, wenn für alle $x, y \in H$ gilt, dass[1]

$$\langle x, y\rangle = \sum_{u\in S}\langle x, u\rangle\langle u, y\rangle.$$

Lösung:
Sei S ONB. Dann ist $x = \sum_{u\in S}\langle x, u\rangle u$, also

$$\langle x, y\rangle = \langle\sum_{u\in S}\langle x, u\rangle u, y\rangle = \sum_{u\in S}\langle x, u\rangle\langle u, y\rangle.$$

Es gelte die Gleichung. S ist bereits ONS. Sei $x \perp S$. Dann ist also $\langle x, u\rangle = 0$ für $u \in S$. Es folgt

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \sum_{u\in S}\langle x, u\rangle\langle u, x\rangle = \sum 0 = 0,$$

also $x = 0$ und damit S ONB.

Präsenzaufgabe 3:
Es seien H_1, H_2 Hilberträume und $\{e_i\} \subset H_1, \{b_i\} \subset H_2$ Orthonormalsysteme sowie $\{\lambda_i\} \subset \mathbb{K}$. Die Abbildung $U\colon H_1 \to H_2$ sei definiert durch

$$U(x) = \sum_i \langle x, e_i\rangle\lambda_i b_i.$$

Bestimme $\|U\|$.

Lösung:
Nach der Parsevalschen Gleichung und der Besselschen Ungleichung ist

$$\|U(x)\| = \|\sum_i\langle x, e_i\rangle\lambda_i b_i\|^2 = \sum_i \|\langle x, e_i\rangle\lambda_i b_i\|^2 = \sum_i |\lambda_i|^2|\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \sup\{|\lambda_i|^2\}\|x\|^2_{H_1},$$

[1] Auch diese Gleichung heißt Parsevalsche Gleichung.

also $\|U\| \leq \sup\{|\lambda_i|\}$.
Ferner ist mit $x = e_i$

$$\|U(x)\| = \|\sum_j \langle e_i, e_j \rangle \lambda_j b_j\| = \|\lambda_i b_i\| = |\lambda_i|.$$

Insgesamt folgt $\|U\| = \sup\{\lambda_i\}$.