FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

11.4.2013

1. Übung zur Funktionalanalysis I im SS 2013

Präsenzaufgabe 1:

Gib auf der Menge $X = \{1, 2, 3, 4\}$ eine Metrik an.
Gib verschiedene Abbildungen $d\colon X^2 \to \mathbb{R}$ an, die keine Metriken sind.

Präsenzaufgabe 2:

Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge und $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

Zeige, dass d eine Metrik auf M ist. Beschreibe die offenen und abgeschlossenen Mengen.

Präsenzaufgabe 3:

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Beweise die folgende Ungleichung für alle $w, x, y, z \in X$:

$$|d(x, y) - d(z, w)| \leq d(x, z) + d(w, y).$$

Präsenzaufgabe 4:

Beweise, dass eine Funktion $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ genau dann eine Metrik auf M ist, wenn

$$\forall\, x, y \in M: \quad d(x, y) = 0 \iff x = y \quad \text{und} \quad \forall\, x, y, z \in M: \quad d(x, y) \leq d(z, x) + d(y, z)$$

gelten.

Hausübungen

Abgabe: 17.4.2013, 6 Uhr

Hausaufgabe 1:

a) Gib verschiedene Metriken und Nicht-Metriken auf $X = \{\text{Fenster, Tür, Tafel, Kreidehalter, Lampe}\}$ an.

b) Definieren die folgenden Funktionen Metriken auf $\mathbb{R}$?
   i) $d(x, y) = |x - y|^p$ für $p \in \mathbb{R}$ (für welche p)?
   ii) $d(x, y) = \cos^2(x - y)$?
   iii) $d(x, y) = x - 2y$

c) Beweise oder widerlege: $d(x, y) = \left|\log|\frac{x}{y}|\right|$ ist Metrik auf $\mathbb{R}^+$.

Hausaufgabe 2:
Für jede Norm wird durch $d(x,y) = \|x-y\|$ eine Metrik definiert. Ist $\big(C^1([a,b]), \|\cdot\|_\infty\big)$ ein vollständiger metrischer Raum?

Hausaufgabe 3:
Welche Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ machen $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ zu einer Metrik auf $\mathbb{R}$?

Hausaufgabe 4:
Sei $X = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}; x_n \in \mathbb{R}\}$ und sei $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}.$$

Zeige, dass (X,d) ein metrischer Raum ist, die Metrik d aber nicht von einer Norm erzeugt wird.
Tipp: Vgl. Ana I, WS 2011/12, Übung 1.