FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

13.6.2013

10. Übung zur Funktionalanalysis I im SS 2013

Präsenzaufgabe 1:
Sei H ein Hilbertraum. Gib eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass die Identität $I: H \to H$ kompakt ist.
Ist der Rechtsshift auf l^2 kompakt?

Präsenzaufgabe 2:
Sei $k: [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Auf $L^2(0,1)$ sei der Operator T durch

$$Tf(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y) \, \mathrm{d}y$$

definiert. Bestimme T^*. Unter welcher Bedingung an k ist T selbstadjungiert?

Präsenzaufgabe 3:
Sei H unendlichdimensionaler Hilbertraum, $K: H \to H$ kompakt. Zeige: $0 \in \sigma(K)$.

Präsenzaufgabe 4:
Zeige für den stetigen linearen Operator $A: H \to H$, dass $\lambda \in \sigma(A)$ genau dann, wenn $\overline{\lambda} \in \sigma(A^*)$.

Hausübungen

Abgabe: 20.6.2013, 6 Uhr

Hausaufgabe 1:
Sei H ein Hilbertraum und $\{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von H. Für $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty$ sei $T \in L(H)$ definiert durch

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Zeige, dass T genau dann kompakt ist, wenn $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Bestimme T^*.

Hausaufgabe 2:
H sei (immer noch) Hilbertraum und $A \in L(H)$. Zeige, dass $\ker(A^*) = \ker(AA^*)$ und $\overline{A(H)} = \overline{AA^*(H)}$

Hausaufgabe 3:

Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen für einen Operator $U \in L(H)$ eines (du hast es erraten:) Hilbertraums H:

a) U ist isometrisch, also $\|Ux\| = \|x\|$.

b) Es gilt $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$.

Zeige ferner, dass unitäre Operatoren diese Eigenschaften haben.

Hausaufgabe 4:

Sei K ein kompakter selbstadjungierter Operator des Hilbertraums H. Zeige, dass $(I-K)x = y$ genau dann für alle $y \in H$ eindeutig lösbar ist, wenn $\ker(I-K) = \{0\}$.

Hausaufgabe 5:

Bestimme die Adjungierte von $T : L^2([0,1]) \longrightarrow L^2([0,1]),\ f \longmapsto T_f$ mit

$$T_f(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} x f(s)\, ds - \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 f(s)\, ds\,.$$