FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

20.6.2013

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

11. Übung zur Funktionalanalysis I im SS 2013

Präsenzaufgabe 1:

Beweise die folgende Behauptung mit Hilfe des Satzes von Baire: Sei $\mathcal{P}$ der Vektorraum der Polynome auf $\mathbb{R}$ und $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathcal{P}$. Dann ist $(\mathcal{P}, \|\cdot\|)$ kein Banachraum.

Präsenzaufgabe 2:

Seien E und F zwei Banachräume und (T_n) eine Folge in $L(E,F)$, so dass für jedes $y \in E$ ein Element $Ty \in F$ existiert mit $T_n y \to Ty$ für $n \to \infty$. Zeige, dass für $(x_n) \subset E$ mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$ folgt, dass $T_n x_n \to Tx$ für $n \to \infty$ in F.

Präsenzaufgabe 3:

Seien E, F Banachräume, I eine beliebige Indexmenge und $A_i \in L(E,F)$ für alle $i \in I$ mit

$$\sup_{i\in I} \|A_i\|_{L(E,F)} = \infty.$$

Zeige, dass ein $x \in E$ existiert mit

$$\sup_{i\in I} \|A_i x\|_F = \infty.$$

Hausübungen

Abgabe: 26.6.2013, 6 Uhr

Hausaufgabe 1:

Beweise die folgenden Behauptungen:

a.) $\mathbb{Q}$ kann nicht als abzählbarer Durchschnitt von offenen Mengen aus $\mathbb{R}$ geschrieben werden (Hinweis: Satz von Baire).

b.) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann kann die Menge der Stetigkeitspunkte von f als abzählbarer Durchschnitt von offenen Mengen geschrieben werden.
Hinweis: Studiere für eine beschränkte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Eigenschaften von

$$\omega_f(x) = \lim_{r\to 0^+} \left(\sup_{B(x,r)} f - \inf_{B(x,r)} f \right).$$

Zeige, dass die Mengen $\{x \in \mathbb{R} \mid \omega_f(x) < \frac{1}{n}\}$ offen sind in $\mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c.) Es gibt keine beschränkte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die in allen rationalen Zahlen stetig, aber in allen irrationalen Zahlen unstetig ist.

d.) Es existiert eine beschränkte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die in allen irrationalen Zahlen stetig und in allen rationalen Zahlen unstetig ist. (Gib ein Beispiel an.)

Hausaufgabe 2:

Zeige: Jeder Unterraum Y eines normieren Raumes X, der eine ganze Kugel enthält, stimmt bereits mit X überein.
Zeige: Kein Banachraum kann eine abzählbare Basis (im Sinne der linearen Algebra) haben.

Hausaufgabe 3:

Seien E und F Banachräume und $a : E \times F \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform mit:

$a.$) Für jedes feste, aber beliebige $x \in E$ ist die Abbildung $y \mapsto a(x, y)$ stetig.

$b.$) Für jedes feste, aber beliebige $y \in F$ ist die Abbildung $x \mapsto a(x, y)$ stetig.

Zeige, dass ein $C \geq 0$ existiert mit

$$|a(x, y)| \leq C\|x\|\|y\| \ \forall x \in E, \ \forall y \in F.$$

Hausaufgabe 4:

Sei

$$X := \{ x \in l^\infty \ : \ x_j = 0 \text{ mit Ausnahme von endlich vielen } j \}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir den linearen Operator $T_n : X \longrightarrow X$ durch

$$T_n(x) := (1 \cdot x_1, 2 \cdot x_2, 3 \cdot x_3, \ldots, n \cdot x_n, 0 \ldots).$$

Bearbeite eine der folgenden Teilaufgaben und begründe deine Wahl:

a) Zeige mit dem Satz von Banach-Steinhaus, dass die Menge der Operatoren $\{ T_n \ : \ n \in \mathbb{N} \}$ gleichmäßig beschränkt ist.

b) Zeige: Die Menge der Operatoren $\{ T_n \ : \ n \in \mathbb{N} \}$ ist punktweise, aber nicht gleichmäßig beschränkt.