FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

27.6.2013

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

12. Übung zur Funktionalanalysis I im SS 2013

Präsenzaufgabe 1:
Sei $A\colon X \to Y$ eine bijektive stetige lineare Abbildung zwischen zwei Banachräumen. Dann ist A stetig invertierbar.

Präsenzaufgabe 2:
Sei E ein Banachraum und $T : E \to E'$ ein linearer Operator mit

$$\langle Tx, x\rangle := Tx(x) \geq 0 \ \forall x \in E.$$

Zeige mit Hilfe des Satzes vom abgeschlossenen Graphen, dass T beschränkt ist.

Präsenzaufgabe 3:
Sei $A\colon X \to Y$ (mit Banachräumen X, Y) abgeschlossen. Dann ist $ker(A)$ abgeschlossen.

Präsenzaufgabe 4:
Seien E, F normierte Räume, $D \subset E$ Untervektorraum, $A\colon D \to F$ linear.

a) Ist A stetig und abgeschlossen sowie F vollständig, dann ist D abgeschlossen.

b) Ist A abgeschlossen, so ist auch $A - \alpha I$ abgeschlossen (für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$).

Hausübungen

Abgabe: 3.7.2013, 6 Uhr

Hausaufgabe 1:
Sei X ein Banachraum bezüglich der Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$, wobei für eine Konstante C die Abschätzung $\|x\|_2 \leq C\|x\|_1$ gelte. Zeige: Dann sind die beiden Normen bereits äquivalent.

Hausaufgabe 2:
Sei $A : l^2 \supseteq D \to l^2$ definiert durch

$$A(x_k) = (kx_k)$$

für $(x_k) \in D$.

$a.$) Untersuche A auf Abgeschlossenheit für die beiden Fälle

$$D = \{(x_k) \in l^2 \mid (kx_k) \in l^2\},$$

$$D = \{(x_k) \in l^2 \mid \exists N \in \mathbb{N} : \ x_k = 0 \ \forall k \geq N\}.$$

b.) Seien X, Y beliebige normierte Räume, $D \subset X$ ein Unterraum und $A : D \to Y$ ein linearer Operator mit $Ax = 0$ für alle $x \in D$. Ist A abgeschlossen?

c.) Seien X, Y Banachräume und $D \subset X$ ein Unterraum. Zeige: Ist A linear, injektiv und abgeschlossen, so ist auch $A^{-1} : Y \supseteq \operatorname{ran}(A) \to X$ abgeschlossen.

Hausaufgabe 3:

Seien E, F normierte Räume, $D \subset E$ Untervektorraum, $A \colon D \to F$ linear.

a) Ist D nicht abgeschlossen, so ist $A = I$ zwar stetig, aber nicht abgeschlossen.

b) Ist E vollständig A abgeschlossen und injektiv, $A(D)$ dicht in F und A^{-1} stetig, so ist $A(D) = F$.

c) Ist A abgeschlossen und $\alpha \neq 0$, so ist auch αA abgeschlossen.

Hausaufgabe 4:

Seien $L, L_n : (C^1([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ definiert durch $Lf = f'$ und

$$L_n(f)(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t) - f(t - 1/n)}{1/n} & \text{für } t \in (0,1] \text{ mit } t - 1/n \geq 0, \\ n(f(1/n) - f(0)) & \text{sonst,} \end{cases}$$

für $f \in C^1([0,1])$, $n \in \mathbb{N}$. Beweise die folgenden Aussagen:

a.) L ist abgeschlossen, aber nicht stetig.

b.) L_n ist beschränkt für alle $n \in \mathbb{N}$.

c.) Für alle $f \in C^1([0,1])$ ist $L_n f \to Lf$ für $n \to \infty$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$.

d.) L_n konvergiert nicht gegen L bezüglich der Operatornorm.