FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

4.7.2013

13. Übung zur Funktionalanalysis I im SS 2013

Präsenzaufgabe 1:
Zeige mithilfe des Zornschen Lemmas den Fortsetzungssatz von Hahn-Banach auch für nicht-separable Räume

Präsenzaufgabe 2:
Es sei E ein normierter Raum und $E' = L(E, \mathbb{K})$. Zeige, dass

$$\|x\| = \sup_{\substack{x' \in E' \\ \|x'\|=1}} |x'(x)|$$

und dass dieses Supremum sogar angenommen wird.

Präsenzaufgabe 3:
E sei ein normierter Raum und sein Dual $E' = L(E, \mathbb{K})$ sei separabel. Zeige: Auch E ist dann separabel.

Präsenzaufgabe 4:
Seien $a, b \in [0,1]$ mit $a \neq b$, $X := \{f : [0,1] \to \mathbb{R}, f \text{ beschränkt}\}$ versehen mit der Supremumsnorm und $U := \{f \in X : f(a) = f(b)\} \subset X$. Finde ein stetiges lineares Funktional auf $F \in L(U, \mathbb{R})$, das unendlich viele stetige und normerhaltende lineare Fortsetzungen besitzt.

Hausübungen

Abgabe: 10.7.2013, 6 Uhr

Hausaufgabe 1:
Es sei E ein normierter Raum und $M \subset E$ sowie $x \in E$. Zeige: Genau dann gilt $x \in \overline{\operatorname{span} M}$, wenn jede stetige Linearform, die auf M nur den Wert 0 annimmt, auch in x null ist.

Hausaufgabe 2:
Sei E ein normierter Raum und I eine Indexmenge. Seien $x_i \in E$ linear unabhängig und $c_i \in \mathbb{K}$ für $i \in I$. Zeige die Äquivalenz von

a) Es existiert $f \in L(E, \mathbb{K})$ mit $f(x_i) = c_i$ für alle $i \in I$.

b) Es gibt $M \geq 0$, sodass für alle endlichen Teilmengen $J \subset I$ die Ungleichung

$$\left| \sum_{j \in J} \lambda_j c_j \right| \leq M \| \sum_{j \in J} \lambda_j x_j \|$$

erfüllt ist.

Hausaufgabe 3:

Informiere dich in einem Funktionalanalysisbuch, was der *Trennungs*satz von Hahn-Banach aussagt. Stelle seine Aussage auch zeichnerisch dar. Wie geht der Hahn-Banachsche Fortsetzungssatz in den Beweis ein?

Hausaufgabe 4:

Sei $X := C^1([0,1]), |||\cdot|||)$ mit

$$|||f||| := \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}.$$

Sei $U := \{f \in X : f(0) = 0\}$ und $\varphi : U \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\varphi(f) := \int_0^1 \frac{f(t)}{t} dt, \ f \in U.$$

a.) Zeige: $\varphi \in U'$ mit $\|\varphi\| = 1$.

b.) Konstruiere eine stetige und normerhaltende lineare Fortsetzung $\Phi : X \to \mathbb{R}$ von φ.

Hausaufgabe 5:

Es sei $G \subset l^1$ mit $G = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1 : x_1 = x_3 = x_5 = \ldots = 0\}$. Zeige, dass mit einer Ausnahme (welcher?) jedes stetige Funktional auf G unendlich viele stetige, lineare Fortsetzungen mit gleicher Norm auf l^1 zulässt. Benutze dazu, dass sich jedes stetige lineare Funktional $g\colon l^1 \to \mathbb{R}$ mithilfe einer beschränkten Folge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als $g(x) = \sum_{n=1}^\infty \xi_n x_n$ darstellen lässt und dann $\|g\| = \|\xi\|_\infty$ gilt.

Der Fachschaftsrat lädt ein zum Spieleabend am **Donnerstag, den 11. Juli 2013, ab 18:03 Uhr** im LuDi.