FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

11.7.2013

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

14. Übung zur Funktionalanalysis I im SS 2013

Präsenzaufgabe 1:
Beweise: Räume mit endlichdimensionalem Dualraum sind endlichdimensional.

Präsenzaufgabe 2:
Seien X, Y Banachräume, $A \in L(X,Y)$. Zeige:

$$A'' \circ j_X = j_Y \circ A$$

wobei $j_X : X \to X''$, $j_Y : Y \to Y''$ die kanonischen Abbildungen sind.

Präsenzaufgabe 3:
Jeder endlichdimensionale Banachraum ist reflexiv.

Präsenzaufgabe 4:
Bestimme die Dualräume von c_0 und l^1 und zeige, dass $(l^\infty)'$ nicht mit l^1 übereinstimmt.

Hausübungen

Abgabe: 17.7.2013, 6 Uhr

Hausaufgabe 1:
Zeige: Reflexive normierte Räume sind stets Banachräume.

Hausaufgabe 2:
Seien X, Y Banachräume. Seien $A : X \to Y$ und $B : Y' \to X'$ linear mit

$$y'(Ax) = (By')(x) \quad \forall x \in X,\ y' \in Y'.$$

Zeige, dass A und B stetig sind.

Hausaufgabe 3:
Sei X reflexiv. Zeige: Dann ist auch X' reflexiv.

Hausaufgabe 4:
Ein reflexiver Raum ist genau dann separabel, wenn sein Dual es ist. Hinweis: Blatt 13.

Hausaufgabe 5:
Zeige:

$$L^1(0,1) \subsetneq (L^\infty(0,1))'.$$

Hinweis: Betrachte für $x \in [0,1]$ und $f \in C([0,1])$ das durch $\delta_x(f) = f(x)$ definierte Funktional und setze dieses mit Hilfe des Satzes von Hahn - Banach stetig auf $L^\infty(0,1)$ fort. Du darfst ohne Beweis folgendes Resultat verwenden: Sei $u \in L^1(0,1)$ mit

$$\int_0^1 uf\ dx = 0\ \forall f \in C_c(0,1).$$

Dann gilt $u = 0$ fast überall auf $(0,1)$.

Hausaufgabe 6:

X sei ein reflexiver Banachraum und $U \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Zeige: U ist reflexiv.
Betrachte dazu zu $u'' \in U''$ die Abbildung $x' \mapsto u''(x'|_U)$. Weise nach, dass sie in X'' liegt, nutze Reflexivität von X und führe die Annahme $x \notin U$ (für welches x wohl?) mithilfe des Satzes von Hahn-Banach auf einen Widerspruch.

Hausaufgabe 7:

Folgere aus zwei anderen Aufgaben mit einem kurzen Argument, dass ein Banachraum genau dann reflexiv ist, wenn sein Dual es ist.