FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

18.7.2013

15. Übung zur Funktionalanalysis I im SS 2013

Präsenzaufgabe 1:
Sei X endlichdimensional. Zeige: $x_n \rightharpoonup x$ genau dann, wenn $x_n \to x$.

Präsenzaufgabe 2:
X sei normierter Raum und $M \subset X$ sei schwach abgeschlossen. Zeige: M ist abgeschlossen.

Präsenzaufgabe 3:
Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $u_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$i.)u_n(x) = \sin(n\pi x), \quad ii.)u_n(x) = \sin(n/x), \quad iii.)u_n(x) = \sin(1/nx).$$

Untersuche die vorgelegten Funktionenfolgen auf schwache Konvergenz in $L^p(0,1)$ für $1 < p < \infty$.

Hausübungen

Abgabe: 24.7.2013, 6 Uhr

Hausaufgabe 1:
Sei X ein reflexiver Banachraum und $K \subset X$ abgeschlossen und konvex sowie $x \in X \setminus K$. Zeige: Es gibt $y \in K$ mit $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, K)$.

Hausaufgabe 2:
X sei normierter Raum. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X'$ sei schwach konvergent. Zeige: f_n konvergiert auch schwach*.

Hausaufgabe 3:
Es sei $X = c_0$. Zeige, dass in $l^1 = X'$ die Folge der Einheitsvektoren e_n zwar schwach*, aber nicht schwach gegen 0 konvergiert.

Hausaufgabe 4:
Es seien X, Y normierte Räume und $T\colon X \to Y$ linear. Zeige: T ist stetig, genau dann wenn T schwach konvergente Folgen auf schwach konvergente Folgen abbildet.

Hausaufgabe 5:
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) = ne^{-nx}$. Zeige: Keine Teilfolge von (f_n) konvergiert schwach in $L^1(0,1)$, obwohl f_n beschränkt ist. Untersuche f_n auch auf punktweise Konvergenz und L^1-Konvergenz.