FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

18.4.2013

2. Übung zur Funktionalanalysis I im SS 2013

Präsenzaufgabe 1:
Gilt in metrischen Räumen, dass
$$\overline{B_\varepsilon(x)} = \{y; d(x,y) \leq \varepsilon\}?$$

Präsenzaufgabe 2:
Zeige: Die Räume l^1 und $C(K)$ (Raum der stetigen Funktionen von K nach $\mathbb{R}$, wobei hier $K \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall sei) sind separabel.
Hinweis: Verwende den Satz von Weierstrass:Die Menge der Polynome liegt dicht in $C(K)$.

Präsenzaufgabe 3:
Wir betrachten den Vektorraum c_{00} der „abbrechenden Folgen", also derjenigen Folgen $(x_n)_n$ reeller Zahlen, für die ein N existiert, sodass $x_n = 0$ für $n > N$.

a) Zeige: Mit $\|x\| = \max_i |x_i|$ wird c_{00} zu einem normierten Raum.

b) Ist c_{00} vollständig?

c) Betrachte die Abbildung
$$f\colon c_{00} \to \mathbb{R}$$
$$f((x_n)_n) = \sum_{k=1}^{n} k x_k.$$
Ist f linear? Stetig?

d) Hast du in c) daran gedacht, f auch auf Wohldefiniertheit zu untersuchen?

Hausübungen

Abgabe: 24.4.2013, 6 Uhr

Hausaufgabe 1:
Zeige:

a) Abgeschlossene Teilmengen vollständiger metrischer Räume sind selbst wieder vollständige metrische Räume.

b) Kompakte metrische Räume sind vollständig.

c) Kompakte metrische Räume sind separabel.

Zeige eine zu a) analoge Aussage für Banachräume.
Wie muss man a) dazu umformulieren?

Hausaufgabe 2:

Es sei M eine Menge und d_1, d_2 zwei Metriken auf M. d_1 und d_2 heißen äquivalent, falls es für alle $x \in M$ und alle $\varepsilon > 0$ Zahlen δ_1, $\delta_2 > 0$ gibt, so dass

$$B_{d_1}(x, \delta_1) \subset B_{d_2}(x, \varepsilon),\ B_{d_2}(x, \delta_2) \subset B_{d_1}(x, \varepsilon).$$

a.) Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- d_1 und d_2 sind äquivalent
- (M, d_1) und (M, d_2) haben die gleichen offenen Mengen
- (M, d_1) und (M, d_2) haben die gleichen konvergenten Folgen

b.) Sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass durch $\overline{d}(x, y) := \min\{d(x, y), 1\}$ eine zu d äquivalente Metrik definiert ist.

Hausaufgabe 3:

a.) Sei $1 < p < q < \infty$. Zeige die Inklusion $l^1 \subset l^p \subset l^q \subset l^\infty$.
b.) Zeige, dass für alle $x \in l^1$ gilt:

$$\lim_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

Hausaufgabe 4:

Es seien X, Y normierte Räume und $f\colon X \to Y$ eine lineare Abbildung.
Zeige: f ist genau dann stetig, wenn

$$\sup_{x \in X, \|x\| = 1} \|f(x)\|_Y$$

beschränkt ist.
Zeige weiterhin: Dies ist gleichbedeutend mit Lipschitz-Stetigkeit von f und gleichbedeutend mit Stetigkeit von f an der Stelle 0.
Gilt das auch für nichtlineare Abbildungen?