FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

25.4.2013

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

3. Übung zur Funktionalanalysis I im SS 2013

Präsenzaufgabe 1:
Beweise mit Hilfe des *Banach'schen Fixpunktsatzes* die folgende Aussage. Sei $k : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und mit γ definiert durch

$$\gamma := \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |k(x,y)|\, dy$$

gelte $\gamma < 1$. Dann hat die Integralgleichung

$$f(x) - \int_0^1 k(x,y) f(y)\, dy = g(x), \quad x \in [0,1]$$

zu jedem $g \in C([0,1])$ genau eine Lösung $f \in C([0,1])$. Zudem gilt $\|f\|_\infty \le (1-\gamma)^{-1}\|g\|_\infty$.

Präsenzaufgabe 2:
Betrachte die folgenden Abbildungen in $\mathbb{R}$. Überprüfe die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes und untersuche die Existenz von Fixpunkten.

a) $T\colon M \to M, M = (0,1), Tx = \frac{x}{2}$.

b) $T\colon M \to M$, $M = \mathbb{R}$, $Tx = \frac{\pi}{2} + x - \arctan(x)$.

c) $T\colon M \to N$, $M = [0,1]$, $N = [2,3]$.

d) $T\colon M \to M$, $M = \emptyset$.

e) $T\colon M \to M$, $M = [-1,1]$, $Tx = \frac{1}{3}e^x$

Präsenzaufgabe 3:
Zeige: Es gibt genau eine auf $(0,1)$ gleichmäßig stetige Funktion f, die

$$f(x) - \int_0^1 \frac{\sin(xy)}{2+x+y} f(y)\ \mathrm{d}y = \log(x+3)\cos(xe^x) \qquad \forall x \in (0,1)$$

erfüllt. Kannst du eine Abschätzung für $\sup_{x\in(0,1)} |f(x)|$ angeben?

Präsenzaufgabe 4:
Zeige anhand eines einfachen Gegenbeispiels, dass man in den Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes nicht auf Vollständigkeit verzichten kann.

Hausübungen

Abgabe: 2.5.2013, 6 Uhr

Hausaufgabe 1:
Zeige, dass es genau eine stetige Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt, die der Gleichung

$$f(x) = x + \frac{1}{2}\sin(f(x)), \quad \forall\, x \in [0,1]$$

genügt.

Hausaufgabe 2:
Gegeben seien ein vollständiger metrischer Raum (X,d). Die Abbildung $F\colon X \to X$ habe eine der folgenden Eigenschaften.

a) Es gebe $m \in \mathbb{N}$, $k \in (0,1)$ mit $d(F^m x, F^m y) \leq kd(x,y)$.

b) (X,d) sei kompakt und für $x \neq y$ gelte $d(Fx, Fy) < d(x,y)$.

c) $d(F(x), F(y)) \leq kd(x, F(x)) + kd(y, F(y))$ für ein $k < \frac{1}{2}$.

Zeige: F hat genau einen Fixpunkt z und es gilt $F^n x \to z$ für alle $x \in X$.

Hausaufgabe 3:
Für eine Teilmenge A eines metrischen Raums (X,d) und $x \in X$ definieren wir den *Durchmesser von A* und den *Abstand zwischen x und A* durch

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y) \qquad \text{bzw.} \qquad \operatorname{dist}(x,A) = \inf_{y \in A} d(x,y).$$

Beweise:

a) X ist genau dann vollständig, wenn jede fallende Folge nichtleerer, abgeschlossener Teilmengen A_k mit

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{diam}(A_k) = 0$$

genau ein Element von X enthält, d. h.

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{\, x \,\}.$$

b) Ist A abgeschlossen, so gilt $\operatorname{dist}(x,A) > 0,$ falls $x \notin A$.

c) Ist A kompakt, so wird das Infimum in der Definition des Abstands tatsächlich angenommen.

Hausaufgabe 4:
Zeige den folgenden Satz: Die Funktion $f(x,y)\colon R \to \mathbb{R}$ sei stetig auf $R = \{(x,y); |x - x_0| \leq a, \|y - y_0\| \leq b\}$ mit $x_0 \in \mathbb{R}, a, b > 0$ und sei bezüglich y Lipschitz-stetig. Dann hat das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = y_0$$

genau eine auf $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ für ein $\alpha > 0$ definierte Lösung y.
Formuliere und löse auch eine Aufgabe, in der du diesen Satz anwendest.

Der Fachschaftsrat lädt euch ein zum

SPIELEABEND

am **Donnerstag, dem 2. Mai 2013, ab 18:03 Uhr** im LuDi und in der Fachschaft.
Für Knabbereien und eine kleine Sammlung an Brett- und Kartenspielen werden wir sorgen. Getränke sowie eigene Spiele könnt ihr gerne selbst mitbringen. Wir freuen uns auf euch!
Euer Fachschaftsrat Mathematik