FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

3.5.2013

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

4. Übung zur Funktionalanalysis I im SS 2013

Präsenzaufgabe 1:
Welche Mengen sind in $\mathbb{R}^n$ relativkompakt?

Präsenzaufgabe 2:
Untersuche die folgenden Mengen auf relative Kompaktheit in $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$:

$$M_1 = \{f \in C([0,1]) \mid f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}_0\},$$

$$M_2 = \{f \in C^1([0,1]) \mid |f(x)| \leq x,\ |f'(x)| \leq x\ \forall\, x \in [0,1]\},$$

$$M_3 = \{f \in C^1([0,1]) \mid f(0) = 0,\ |f'(x)| \leq 2 + \sin(\pi x)\ \forall\, x \in [0,1]\}.$$

Präsenzaufgabe 3:
Zeige: Im Raum $L^p([0,1])$ (den wir als Vervollständigung des Raumes stetiger Funktionen eingeführt haben) gilt die Minkowski'sche Ungleichung.

Präsenzaufgabe 4:
Zeige: Für $a < b \in \mathbb{R}$ ist

$$\overline{(C^\infty([a,b]), \|\cdot\|_2)} = \overline{(C([a,b]), \|\cdot\|_2)}.$$

Hinweis: Analysis III, Blatt 6, HA 1.

Hausübungen

Abgabe: 8.5.2013, 6 Uhr

Hausaufgabe 1:
Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie von Funktionen auf $[0,1]$, deren Supremum jeweils durch C beschränkt sei. Zu jedem $f \in \mathcal{F}$ definiere $F_f(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Zeige: Jede Folge in der Menge $\{F_f; f \in \mathcal{F}\}$ enthält eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Hausaufgabe 2:
Ist die Einheitskugel des Raumes l^2 kompakt? Ist sie relativkompakt?

Hausaufgabe 3:
Beweise oder widerlege:

a) Kompakte Mengen sind beschränkt.

b) Kompakte Mengen sind vollständig.

Hausaufgabe 4:
Für $0 < \alpha \leq 1$ sei der Raum der auf $[0,1]$ zum Exponenten α Hölder-stetigen Funktionen definiert durch

$$C^{0,\alpha}([0,1]) := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid |f|_{0,\alpha} < \infty\},$$

wobei

$$|f|_{0,\alpha} = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Zeige:

a.) Eine Funktion $f \in C^{0,\alpha}([0,1])$ ist genau dann konstant, wenn $|f|_{0,\alpha} = 0$.

b.) Für $f \in C^{0,\alpha}([0,1])$ sei

$$\|f\|_{0,\alpha} := |f(0)| + |f|_{0,\alpha}.$$

Dann ist $\|\cdot\|_{0,\alpha}$ eine Norm auf $C^{0,\alpha}([0,1])$.

c.) Es gilt $C^{0,\alpha}([0,1]) \subset C([0,1])$ und $\|f\|_\infty \leq \|f\|_{0,\alpha}$ für alle $f \in C^{0,\alpha}([0,1])$.

d.) $(C^{0,\alpha}([0,1]), \|\cdot\|_{0,\alpha})$ ist ein Banachraum.

e.) Die Menge

$$B_{0,\alpha} := \{f \in C^{0,\alpha}([0,1]) \mid \|f\|_{0,\alpha} \leq 1\}$$

ist relativ kompakt in $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

f.) Warum betrachten wir nicht $C^{0,\alpha}([0,1])$ für $\alpha > 1$?

Hausaufgabe 5:
Wir definieren für $p \geq 1$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\|u\|_{1,p} = \left(\int_\Omega |u|^p + \int_\Omega |u'|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Zeige

a) Dieser Ausdruck definiert eine Norm auf dem Schnitt der Menge $C^1(\Omega)$ der stetig differenzierbaren Funktionen mit $L^p(\Omega)$.

b) Bestimme die Vervollständigung von $C^1(\Omega)$ bezüglich dieser Norm und zeige, dass sie mit der Menge $W^{1,p}(\Omega)$ derjenigen L^p-Funktionen u übereinstimmt, zu denen eine L^p-Funktion v existiert, sodass für alle $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ gilt: $\int_\Omega \varphi' u = -\int_\Omega \varphi v$.