FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

16.5.2013

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

6. Übung zur Funktionalanalysis I im SS 2013

Präsenzaufgabe 1:

Was ist an der folgenden Formulierung des Satzes über die Neumannsche Reihe falsch?
Es sei X ein normierter Raum, Y ein metrischer Raum, A eine lineare Abbildung von X nach Y. Dann ist $I - A$ invertierbar und $(I - A)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} A^n$.

Präsenzaufgabe 2:

Löse die Integralgleichung

$$u(s) - \int_0^1 st\ u(t)dt = \sin(\pi s), \ \ s \in [0, 1], \ \ u \in C([0, 1]).$$

Präsenzaufgabe 3:

Betrachte den Einbettungsoperator von $L^p(\Omega)$ nach $L^q(\Omega)$.
Ist er linear?
Unter welchen Bedingungen an p, q, Ω wird er stetig?

Präsenzaufgabe 4:

X sei ein normierter Raum.
Zeige: Genau dann ist jede lineare Abbildung von X nach $\mathbb{R}$ stetig, wenn $\dim X < \infty$ ist.

Hausübungen

Abgabe: 22.5.2013, 6 Uhr

Hausaufgabe 1:

Es sei $p \geq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und U ein abgeschlossener Untervektorraum von $W^{1,p}(\Omega)$.
Sei $A\colon W^{1,p}(\Omega) \to U$ ein stetiger linearer Operator mit Operatornorm 42. Betrachte

$$T\colon f \mapsto Af - 100f$$

und zeige, dass T ein invertierbarer linearer stetiger Operator ist.

Hausaufgabe 2:

Es sei K kompakt und $T\colon C(K) \to C(K)$ linear und positiv (soll heißen: $f \geq 0$ (auf K) impliziert auch $Tf \geq 0$).
Zeige: Dann ist T stetig mit Norm $T(x \mapsto 1)$.

Hausaufgabe 3:

Operatoren heißen **kompakt**, wenn sie stetig sind und beschränkte Mengen in relativkompakte Mengen abbilden. Zeige:

$$\begin{aligned} U\colon C([0,1]) &\to C([0,1]) \\ Uf(x) &= \int_0^1 e^{tx} f(t)\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

ist kompakt.

Hausaufgabe 4:

Es gilt folgdender Satz[1]: A sei ein surjektiver stetiger linearer Operator des Banachraums X in den Banachraum Y. Dann ist A offen, d.h. A bildet offene Mengen in offene Mengen ab.
Was hat dieser Satz mit Satz 2.7 (Skript, S.40) zu tun?

Hausaufgabe 5:

Sei X ein Banachraum und $A \in L(X)$. Man definiert den sog. Spektralradius von A durch

$$r(A) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

Beweise die folgenden Aussagen[2]:

a.) $r(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\|A^n\|}$.

b.) Ist $r(A) < 1$, so ist der Operator $(I - A)$ invertierbar und es gilt $(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$.

c.) Konvergiert die Neumannsche Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$, so gilt $r(A) < 1$.

---

[1] Der hier als gegeben angenommen werden darf und im Verlauf des Semesters hoffentlich noch bewiesen werden wird.

[2] Greife dabei gerne auf folgend skizzierten Tipp zurück: $I = \inf$, $\sqrt[n]{\|A^n\|} < I + \frac{\varepsilon}{2}$, $x := \max\{\|A^k\|; k < n\}$, $\sqrt[m]{x} \leq \frac{I+\varepsilon}{I+\frac{\varepsilon}{2}}$ für $m > N_0$.
$k = m - \lfloor \frac{m}{n} \rfloor$ für $m > N_0, n$; $\sqrt[m]{\|A^m\|} \leq \ldots \leq I + \varepsilon$.