FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

23.5.2013

7. Übung zur Funktionalanalysis I im SS 2013

Präsenzaufgabe 1:

Zeige: Sei X normierter Raum und M ein endlichdimensionaler Unterraum. Dann gibt es zu jedem $x \in X$ ein $z \in M$ mit $\|x - z\| = \inf_{y \in M} \|x - y\|$.

Präsenzaufgabe 2:

Betrachte (für passend klein gewähltes $\varepsilon > 0$) auf $l^2(\mathbb{R})$ und dem Unterraum

$$X = \{x;\ \text{für nur endlich viele } i \text{ gilt } x_i \neq 0\}$$

den Shiftoperator

$$(Tx)_i = \begin{cases} 0 & i = 1 \\ \varepsilon x_{i-1} & i > 1. \end{cases}$$

Was geht beim Anwenden des Satzes über die Neumannsche Reihe schief?

Präsenzaufgabe 3:

Gegeben sei $f : (c_0, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_n$$

für alle $x = (x_n) \in c_0$.

a.) Zeige: $f \in (c_0, \|\cdot\|_\infty)'$.

b.) Berechne die Operatornorm von f. Nimmt f seine Operatornorm in einem $x \in c_0$ an?

Hausübungen

Abgabe: 29.5.2013, 6 Uhr

Hausaufgabe 1:

a) Zeige: Die Resolventenmenge eines Operators A ist offen. Dabei versteht man unter der Resolventenmenge $\rho(A)$ die Menge
$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{K};\quad (\lambda I - A) \text{ hat ein stetiges Inverses}\}.$$

b) Zeige: Ist $|\lambda| > r(A) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$, so ist $\lambda \in \rho(A)$.

c) Das Komplement der Resolventenmenge heißt „Spektrum von A“ und wird mit $\sigma(A)$ bezeichnet. Was können wir über $\sigma(A)$ aussagen?
(Und was hat dieses Spektrum mit dem aus LinA bekannten Spektrum zu tun?)

Hausaufgabe 2:

P, Q seien lineare Operatoren auf dem BR X mit $PQ - QP = I$. Dann sind P und Q nicht beide stetig.
Hinweis: $PQ^n - Q^n P = \ldots$.

Hausaufgabe 3:

a) Sei X Banachraum und M abgeschlossener Unterraum. Zeige: Dann muss es zu $x \in X$ nicht unbedingt ein Element bester Approximation in M geben. Orientiere dich beim Beweisen ruhig am Skript. (Hinter Satz 2.22) An welcher Stelle versagt der Beweis aus der Präsenzaufgabe?

b) Wofür haben wir im Beweis von Satz 2.21 die Unterraumeigenschaft von M verwendet? Welche Eigenschaft hätten wir stattdessen nehmen können?

Hausaufgabe 4:

Sei X ein unendlichdimensionaler normierter Raum, sei $\delta > 0$. Zeige: Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\|x_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\|x_n - x_m\| > 1 - \delta$ für alle m, n.
Tipp: Suche zu schon gefundenen $x_k, k = 1, \ldots, n-1$ ein x_n, das „fast orthogonal“ auf dem von ihnen aufgespannten Unterraum steht, d.h. die Richtung eines Vektors, der beinahe benutzt werden kann, um den Abstand eines Punktes von diesem Unterraum zu messen.
Vergleiche mit der Situation im Hilbertraum.