FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

29.5.2013

8. Übung zur Funktionalanalysis I im SS 2013

Hausübungen

Abgabe: 5.6.2013, 6 Uhr

Hausaufgabe 1:

Beweise den Satz über die Parallelogrammgleichung.

Hausaufgabe 2:

Zeige: $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ ist kein Prähilbertraum.

Hausaufgabe 3:

Sei K eine lineare Abbildung auf dem Hilbertraum H mit $\langle Kf, g\rangle = \langle f, Kg\rangle$ für alle $f, g \in H$ und seien x, y Eigenvektoren von K zu unterschiedlichen Eigenwerten, also $Kx = \lambda x$, $Ky = \mu y$. Zeige: $x \perp y$.

Hausaufgabe 4:

Zeige: Über $\mathbb{R}$ gilt auch die „Umkehrung des Satzes von Pythagoras“: Gilt $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, so ist $x \perp y$. Wie ist das über $\mathbb{C}$?

Hausaufgabe 5:

Zeige mithilfe einer Aufgabe des letzten Blattes: Ein normierter Raum X ist genau dann endlichdimensional, wenn die (abgeschlossene) Einheitskugel kompakt ist.

Hausaufgabe 6:

X sei der $\mathbb{C}$-Vektorraum aller Funktionen der Form $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{i\alpha_k t}$ (für ein $n \in \mathbb{N}$ und $c_k \in \mathbb{C}, \alpha_k \in \mathbb{R}$ für $k = 1, \dots, n$).

a) Zeige, dass die Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X \times X \to \mathbb{C}$, die durch

$$\langle f, g\rangle = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{A} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$$

ein Skalarprodukt auf X definiert.

b) Zeige, dass für die von diesem Skalarprodukt induzierte Norm $\|\cdot\|$ gilt, dass $\|f\| = \left(\sum_{k=1}^n |c_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, falls sich $f \in X$ als $f = \sum_{k=1}^n c_k e^{i\alpha_k t}$ (mit $\alpha_k \neq \alpha_j$ für $k \neq j$) darstellen lässt.

c) Sei $(c_k)_k \in l^2$ mit $c_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeige anhand der Folge $f_n = \sum_{k=1}^n c_k e^{ikt}$, dass X nicht vollständig ist.

d) Sei H die Vervollständigung von X. Zeige: H ist ein nicht-separabler Hilbertraum.

Hinweis für diejenigen, die $\mathbb{C}$ nicht mögen: Ja, es ist $\int e^{it}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{i} e^{it}$.

Hinweis zu Teil d): Zeige: $t \mapsto e^{ist}$, $s \in \mathbb{R}$, ist Orthonormalsystem.