FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Patrizio Neff
Frank Osterbrink
Johannes Lankeit

6.6.2013

9. Übung zur Funktionalanalysis I im SS 2013

Präsenzaufgabe 1:
Sei $F\colon W^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ stetig und linear. Zeige: Es gibt $u, v \in L^2(\Omega)$, sodass für alle $w \in W^{1,2}(\Omega)$

$$F(w) = \frac{1}{2}\int_\Omega wu \,\mathrm{d}x + \frac{1}{42}\int_\Omega vw' \,\mathrm{d}x.$$

Präsenzaufgabe 2:
Sei H Hilbertraum und $S \subset H$ ein Orthonormalsystem. Zeige: S ist ONB genau dann, wenn für alle $x, y \in H$ gilt, dass[1]

$$\langle x, y\rangle = \sum_{u\in S} \langle x, u\rangle\langle u, y\rangle.$$

Präsenzaufgabe 3:
Es seien H_1, H_2 Hilberträume und $\{e_i\} \subset H_1, \{b_i\} \subset H_2$ Orthonormalsysteme sowie $\{\lambda_i\} \subset \mathbb{K}$. Die Abbildung $U\colon H_1 \to H_2$ sei definiert durch

$$U(x) = \sum_i \langle x, e_i\rangle \lambda_i b_i.$$

Bestimme $\|U\|$.

Hausübungen

Abgabe: 12.6.2013, 6 Uhr

Hausaufgabe 1:
Ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge orthonormaler Vektoren im Hilbertraum H, so streben für jedes $x \in H$ die Fourierkoeffizienten $\langle x, u_n\rangle$ gegen 0.

Hausaufgabe 2:
Für ein $a > 0$ sei $H := L^2(-a, a)$, $L_G := \{f \in H : f(t) = f(-t) \text{ für fast alle } t \in [-a, a]\}$ und $L_U := \{f \in H : f(t) = -f(-t) \text{ für fast alle } t \in [-a, a]\}$. Zeige:

a.) L_G und L_U sind unendlichdimensionale, abgeschlossene Untervektorräume von H.

b.) $L_U^\perp = L_G$ und $L_G^\perp = L_U$.

c.) Gib für beliebiges $h \in H$ die Abstände $d(h, L_G)$ sowie $d(h, L_U)$ an.

d.) Berechne für $t \in [-a, a]$ und $h(t) := t^2 + t$ die Abstände $d(h, L_G)$ und $d(h, L_U)$.

[1] Auch diese Gleichung heißt Parsevalsche Gleichung.

Hausaufgabe 3:

Beweise den folgenden Satz[2]:

Es sei H ein Hilbertraum und $a\colon H \times H \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform[3]. Es sei a stetig ($a(x,y) \leq C\|x\|\,\|y\|$.) und koerzitiv[4]($a(x,x) \geq \widehat{C}\|x\|^2$). Außerdem sei $F \in H'$.

Dann gibt es eine eindeutige Lösung des Problems: Finde $u \in H$, sodass

$$a(v,u) = F(v) \qquad \forall v \in H.$$

Zeige dazu zunächst, dass es zu $x \in H$ ein eindeutiges $\widetilde{x} \in H$ gibt mit $a(x,\cdot) = \langle \cdot, \widetilde{x} \rangle$. Definiere dann $Ax := \widetilde{x}$ und weise nach, dass A linear und stetig ist.

Welche Eigenschaft von A wollen wir nun nachweisen? Warum genügt sie?

Für die Injektivität von A schätze $\|Ax\|$ nach unten gegen $\|x\|$ ab.

Aus dieser Abschätzung kannst du auch folgern, dass $A(H)$ abgeschlossen ist.

Untersuche dann das orthogonale Komplement von $A(H)$.

Hausaufgabe 4:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. $W_0^{1,2}(\Omega)$, die Vervollständigung von $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ in von dem Skalarprodukt

$$(u,v)_1 := \int_X uv\,dx + \int_X \nabla u \nabla v\,dx$$

induzierten Norm $\|.\|_1$, ist ein Hilbertraum. Man kann mithilfe der sog. *Poincareschen Ungleichung* zeigen, dass

$$\|u\|_0 = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

eine zu $\|.\|_1$ äuivalente Norm definiert.

a) Zeige:

$$V = \left\{ v \in W_0^{1,2}(X) \,\middle|\, \int_\Omega v \operatorname{div}\varphi\,dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n) \right\}$$

ist abgeschlossener Unterraum von $W_0^{1,2}(\Omega)$.

b) Gegeben sei nun $f \in L^2(\Omega)$. Zeige, dass es genau ein $u \in V$ gibt mit

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx \quad \forall \varphi \in V.$$

Man nennt eine solche Funktion u dann auch schwache Lösung der Stokes-Gleichung

$$-\Delta u + \nabla p = f,\ \text{div } u = 0 \text{ in } \Omega,\ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega,$$

worin $p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. (Multipliziere diese Gleichung mit $\varphi \in V$ und integriere partiell, um die obige Formulierung zu erhalten.)

Hausaufgabe 5:

Orthogonalisiere in $L^2(\mathbb{R})$ die Funktionen $e^{-\frac{t^2}{2}}, te^{-\frac{t^2}{2}}, t^2e^{-\frac{t^2}{2}}, t^3e^{-\frac{t^2}{2}}$ und erhalte so die ersten der sogenannten Hermiteschen Funktionen.

---

[2]Er ist bekannt unter dem Namen „Lemma von Lax-Milgram“.

[3]Für $\mathbb{C}$−HRe: Sesquilinearform. Uns genügt in dieser Aufgabe aber der reelle Fall.

[4]Oft auch „koerziv“ oder „stark elliptisch“, das ist dasselbe.

Hausaufgabe 6:

Der Fachschaftsrat lädt ein zum **Grillen in der Gruga** (Grillplatz 4) am **Donnerstag, dem 13. Juni 2013, ab 18:03 Uhr**. Wir stellen die Getränke, Grillgut bringt jeder selbst mit; wer möchte, auch Salate. Dazu könnt ihr euch in folgende Doodle-Liste eintragen:

www.doodle.com/wvn5kdzyxx87egsu

Das Grillen wird bei jedem Wetter stattfinden. Wir freuen uns auf euch!

Da wir schonmal bei Hinweisen sind...:

a) Auch alte Hausübungen können gerne noch abgegeben werden. (Punkte bringen sie nicht, aber es gibt eine Korrektur.)

b) Wir weisen nochmal darauf hin, dass es sich lohnen könnte, die Übungszettel zu bearbeiten und abzugeben.

c) Denkt daran, euch für die Klausur anzumelden.