

Mikropolare Plastizität

Vom Fachbereich Mechanik
der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

genehmigte

Dissertation

von

Dipl.-Phys. Paschalis Grammenoudis

aus Karlsruhe

Hauptreferent:

Korreferent:

Tag der Einreichung:

Tag der mündlichen Prüfung:

Prof. Dr.-Ing. Ch. Tsakmakis

Prof. Dr.-Ing. P. Steinmann

07.01.2003

12.02.2003

Darmstadt 2003

D 17

Kurzfassung

In dieser Arbeit wird eine mikropolare Plastizitätstheorie für finite Deformationen, die kinematische und isotrope Verfestigung berücksichtigt, entwickelt. Charakteristische Eigenschaften der Theorie sind die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten und des mikropolaren Rotationstensors in entsprechende elastische und plastische Anteile. Das Elastizitätsgesetz wird vom Zweiten Hauptsatz der Thermodynamik hergeleitet. Außerdem wird für die Definition der Fließfunktion ein Spannungstensor verwendet, der auf dem Mandelschen Spannungstensor im Rahmen der klassischen (nichtpolaren) Plastizität basiert. Das Fließgesetz wird von dem Postulat von Il'iushin hergeleitet, welches für mikropolare Kontinua angemessen formuliert wird. Die Verfestigungseigenschaften werden in die freie Energie und die Fließfunktion einbezogen, wobei die entsprechenden Evolutionsgleichungen als hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit der sogenannten inneren Dissipationsungleichung hergeleitet werden. Auf diese Weise wird für die erarbeiteten mikropolaren Plastizitätsgesetze die thermodynamische Konsistenz gesichert.

Um beliebige mechanische Strukturen als Anfangsrandwertprobleme betrachten zu können, muss das entwickelte konstitutive Modell mittels eines numerischen Verfahrens umgesetzt werden. In der vorliegenden Arbeit geschieht dies mit Hilfe der Methode der finiten Elemente. Aus der starken Form des quasistatischen Randwertproblems werden die schwache Formulierung des Gleichgewichts für mikropolares Materialverhalten und die konsistente Linearisierung der schwachen Form hergeleitet. Auf der Basis dieser Grundgleichungen erfolgt die Beschreibung der Methode der finiten Elemente mittels Einführung einer Diskretisierung und einer isoparametrischen Interpolation. Bei der Integration der Gleichungen findet das Operator-Split-Verfahren Anwendung. Aus den Gleichungen auf Elementebene werden die globalen Gleichungen assembliert und in einer globalen Gleichgewichtssiteration gelöst. Die Finite-Elemente-Methode kann auf beliebige Elementformulierungen angewandt werden. Hier wird ein eigenständig entwickeltes dreidimensionales 8-Knoten-Volumenelement mit Verschiebungs- und Rotationsfreiheitsgraden betrachtet. Dieses Element wird über die Benutzerschnittstelle UEL in das kommerzielle Finite-Elemente-Programm ABAQUS implementiert.

Es wird gezeigt, dass die entwickelte mikropolare Plastizitätstheorie in der Lage ist, Längenskaleffekte im Materialverhalten wiederzugeben. Dazu wird die Torsion eines Vollzylinders diskutiert. Die berechneten Ergebnisse werden qualitativ mit experimentellen Resultaten verglichen. Die Finite-Elemente-Berechnungen demonstrieren, dass bei kleinen Geometrien die Berücksichtigung kinematischer Verfestigung auch für Deformationen mit monotonen Belastungen sehr wichtig ist. Dies ist ein wesentlicher Unterschied zu den klassischen Plastizitätsmodellen. Unterschiede auch hinsichtlich der Effekte zweiter Ordnung wurden bei der einfachen Torsion festgestellt. Weitere Eigenschaften der konstitutiven Theorie werden anhand einer gelochten Platte unter Zugbeanspruchung veranschaulicht. Für die gelochte Platte sagt die Theorie für mikroskopische Geometrien Längenabhängigkeiten voraus. Bei größeren Probengeometrien mit Einschnürung ist für die Beschreibung von Längenabhängigkeiten die Berücksichtigung von Schädigung erforderlich.

Abstract

A finite deformation micropolar plasticity theory exhibiting kinematic and isotropic hardening is developed. Characteristic features of the theory are the multiplicative decomposition of the deformation gradient and the micropolar rotation tensor into elastic and plastic parts, respectively. The elasticity law is derived from the second law of thermodynamics in the form of the Clausius-Duhem-inequality. Also, in defining the yield function use is made of a stress tensor, which corresponds to the Mandel stress tensor within the framework of classical (nonpolar) plasticity. The flow rule is obtained from the postulate of Il'iusin, which is formulated appropriately for micropolar continua. The hardening properties are incorporated in the free energy and the yield function, the associated evolution equations being derived as sufficient conditions for the validity of the so-called internal dissipation inequality. This way, the established micropolar plasticity laws are thermodynamically consistent.

In order to be able to regard arbitrary mechanical structures as initial boundary value problems, the developed constitutive model together with the related field equations have to be integrated numerically. In this work this happens with the help of the finite element method. From the strong form of the quasi-static boundary value problem the weak formulation of the equilibrium for micropolar material behavior and a consistent linearization are derived. On the basis of these principal equations the description of the finite element method takes place by means of an introduction of a discretization and an isoparametric interpolation. For integration of the equations an operator split procedure was used. From the equations on element level the global equations are assembled and solved in a global equilibrium iteration. The finite element method can be applied to arbitrary element formulations. Here a three-dimensional 8-node-volume element with translational and rotational degrees of freedom is developed and implemented into the commercial finite element program ABAQUS.

It is shown that the developed micropolar plasticity theory is able to describe length scale effects in the material behavior. In particular the torsion of a solid cylinder is discussed. The predicted results are compared qualitatively with experimental results. It turns out that for small specimens the presence of kinematic hardening is very important even for deformations due to monotonic increasing loading. This is an important difference to the classical plasticity models. Moreover differences with respect to second order effects were asserted. Further characteristics of the constitutive theory are illustrated with reference to a plate with a hole under tensile stress.

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Technischen Universität Darmstadt.

Meinen besonderen Dank möchte ich meinem wissenschaftlichen Lehrer Herrn Prof. Dr.-Ing. Ch. Tsakmakis aussprechen. Ich darf mich bei ihm an dieser Stelle herzlich bedanken für die Anregung zur Arbeit, seine in jeder Hinsicht großzügige Unterstützung, die stets geduldige und hervorragende wissenschaftliche Betreuung und natürlich auch für die Übernahme des Hauptreferates. Er hat durch zahlreiche engagierte (Fach-)Gespräche zum Gelingen dieser Arbeit entscheidend beigetragen.

Ebenso danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. P. Steinmann für das Interesse an dieser Arbeit und für die freundliche Übernahme des Korreferates.

Schließlich möchte ich mich bei allen Kollegen für das angenehme und freundschaftliche Arbeitsklima und für die in vielerlei Hinsicht hilfreiche Unterstützung bedanken.

Darmstadt, im März 2003

Paschalis Grammenoudis

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Längenabhängigkeiten im Materialverhalten – Gegenstand der Arbeit	1
1.2	Aufbau der Arbeit	4
1.3	Voraussetzungen und Notation	4
1.4	Symbole	8
2	Grundlagen des mikropolaren Kontinuums	13
2.1	Grundbegriffe der Kinematik	13
2.2	Mikropolares Kontinuum	14
2.3	Mikropolare Verzerrungs- und Krümmungstensoren	16
2.4	Mikropolare Verzerrungs- und Krümmungsgeschwindigkeiten	19
2.5	Zerlegung der Deformation	22
2.6	Mikropolare Spannungs- und Momentenspannungstensoren	25
2.7	Bemerkungen zum mikropolaren Krümmungsmaß	27
3	Mikropolares Plastizitätsmodell	29
3.1	Thermodynamischer Rahmen der mikropolaren Plastizität	29
3.2	Mikropolare Elastizitätsgesetze – Innere Dissipationsungleichung	30
3.3	Das Postulat von Il’iushin – Fließregel der mikropolaren Plastizität	33
3.4	Fließregel bei mikropolarer Viskoplastizität	39
3.5	Mikropolare Verfestigungsregeln	40
3.5.1	Isotrope Verfestigung	42
3.5.2	Kinematische Verfestigung	44
3.5.3	Transformation des mikropolaren konstitutiven Modells nach \mathcal{R}_t – Kleine elastische Verzerrungen	44
4	Finite-Elemente-Formulierung des mikropolaren Kontinuums	49
4.1	Darstellung des quasistatischen Randwertproblems	49
4.1.1	Starke Formulierung des quasistatischen Randwertproblems	50
4.1.2	Schwache Formulierung des quasistatischen Randwertproblems	51
4.1.3	Räumliche Diskretisierung des quasistatischen Randwertproblems	53
4.2	Numerische Lösung des quasistatischen Randwertproblems	56
4.2.1	Updated-Lagrange-Methode	56
4.2.2	Konsistente Linearisierung	57
4.2.3	Integration der Materialgleichungen – Operator-Split-Verfahren	62

4.2.4	Bestimmung der konsistenten Tangente	65
4.3	Implementierung in ABAQUS	67
5	Finite-Elemente-Beispiele	69
5.1	Wahl der Materialparameter	69
5.2	Torsion eines Kreiszyinders	71
5.3	Zug einer gelochten Platte	80
6	Zusammenfassung	85
A	Transformationsbeziehungen bei überlagerten Starrkörperrotationen	87
B	Zerlegung der kinematischen mikropolaren Größen	89
C	Der Mandelsche Spannungstensor für rein elastische Systeme	103
	Literaturverzeichnis	105

1 Einführung

1.1 Längenabhängigkeiten im Materialverhalten – Gegenstand der Arbeit

In der Kontinuumsmechanik werden Stoffgesetze üblicherweise in lokaler Form eingesetzt. In diesem Sinne hängt der aktuelle Wert der Spannung an einem materiellen Punkt einzig und allein von dem Zustand dieses Punktes sowie dessen Geschichte ab. Der Zustand benachbarter Punkte spielt keine Rolle. Die mathematische Form der Gleichungen umfasst dabei algebraische Gleichungen, gewöhnliche Differentialgleichungen und Algebroidifferentialgleichungen. Aufgrund des lokalen Charakters der zugrundegelegten Materialtheorie dürfen z. B. partielle Differentialgleichungen im System der konstitutiven Gleichungen nicht vorkommen. Insbesondere stellt die klassische Plastizität eine lokale Theorie dar, bei der algebraische und gewöhnliche Differentialgleichungen in Abhängigkeit von Fallunterscheidungen zum Tragen kommen. Ein besonderes Merkmal lokaler Theorien besteht darin, dass bei geometrisch ähnlichen Problemen die Lösungen, sofern sie in geeignet enddimensionierter Form vorliegen, gleich bleiben.

Mit Hilfe lokal formulierter Materialmodelle ist es möglich, eine Reihe von Problemen aus dem Bereich der klassischen Strukturmechanik erfolgreich zu diskutieren. Dafür sind ausgereifte mathematische Lösungsverfahren, Verfahren zur Bestimmung von Materialparametern sowie experimentelle Methoden zur Erkundung materieller Eigenschaften entwickelt worden. Mit dem heutigen Kenntnisstand wird es immer offensichtlicher, dass sich die Möglichkeiten lokaler Theorien erschöpfen, sobald die Abmessungen der Bauteile derart gewählt werden, dass sie in der Größenordnung innerer Längenskalen im Material liegen. Ähnliches gilt auch für den Fall sogenannter Lokalisierungen, bei denen sich die gesamte Deformationsänderung im Wesentlichen in einem schmalen Bereich konzentriert. Eine Möglichkeit, solche Probleme zufriedenstellend zu untersuchen, beruht auf der Vorstellung, dass die verschiedenen Zustandsvariablen abhängig sind von höheren Gradienten im Sinne einer asymptotischen Entwicklung funktionaler Beziehungen. Bei Problemen der klassischen Strukturmechanik sind die Koeffizienten der höheren Gradienten vernachlässigbar klein im Vergleich zu den geometrischen Abmessungen des Problems und haben somit keinen nennenswerten Einfluss auf die Lösungsmannigfaltigkeiten. Bei geschickter Formulierung der Theorie ist es möglich, die bedeutenden Koeffizienten als innere Längenskalen zu interpretieren. Vom Standpunkt der Materialtheorie aus betrachtet, spielen innere Längenskalen in den klassischen Theorien keine besondere Rolle.

Der Sachverhalt ändert sich, wenn beispielsweise Bauteile der Mikrosystemtechnik betrachtet werden. Mikrosensoren, -ventile, -pumpen, usw. besitzen laterale Abmessungen, die in derselben

Größenordnung liegen können wie die inneren Längenskalen. Dasselbe gilt bei Lokalisierungen in makroskopischen Proben. Die Breite der beobachteten lokalisierten Zone ist von der gleichen Größenordnung wie die inneren Längenskalen. In diesen Fällen müssen höhere Gradienten im System der Materialgleichungen berücksichtigt werden. Das heißt, dass nichtlokale Materialgleichungen herangezogen werden müssen. Experimentelle Bestätigung dieser Vorstellungen liefern einerseits die Mikrotorsionsexperimente von FLECK ET AL. [39] und die Mikrobiegeexperimente von STÖLKEN & EVANS [84] und auf der anderen Seite die experimentellen Befunde im Zusammenhang mit sogenannten Scherbändern (siehe z. B. ZHU ET AL. [98] und die darin zitierte Literatur). Es muss jedoch erwähnt werden, dass bei diesen Experimenten plastisches Fließen immer vorhanden ist. Im rein elastischen Bereich sind Längenskaleneffekte hauptsächlich bei geophysikalischen Materialien beobachtet worden (siehe VARDOULAKIS [94]). Im atomaren Bereich sind bei Metallen Längenskalenabhängigkeiten auch bei rein elastischen Deformationen in Form von Dispersionsrelationen bei Wellenausbreitungsphänomenen festgestellt worden, die mit klassischen Elastizitätsgesetzen nicht beschreibbar sind (siehe ERINGEN [35]).

Die Idee der systematischen Entwicklung einer nichtlokalen Kontinuumsmechanik geht auf die Gebrüder Cosserat im Jahre 1909 zurück (siehe COSSERAT [24]). Es folgten eine Reihe von weiteren Entwicklungen sowohl für Fluide als auch für Festkörper. Im Folgenden werden einige Stationen dieser Entwicklung skizziert, die von Interesse für die vorliegende Arbeit sind.

Um mikroskopische Effekte im Materialverhalten mit den Mitteln der Kontinuumsmechanik zu erfassen, schlugen MINDLIN [73] und ERINGEN [36] vor, das Material als ein (Makro-)Kontinuum mit Mikrostruktur (sog. Mikrokontinuum) zu beschreiben. Die Mikrostruktur stellt einen deformierbaren Körper dar, der an den betrachteten materiellen Punkt angeheftet wird. Der Deformationsgradient der Mikrostruktur ist einerseits von dem betrachteten materiellen Punkt des Makrokontinuums und andererseits von der Lage innerhalb des Mikrokontinuums abhängig. Zwei Sonderfälle sind wegen ihrer einfachen Form sehr wichtig: Der erste Fall ergibt sich, wenn das Mikrokontinuum einen starren Körper darstellt, während im zweiten Fall das Mikrokontinuum nur homogene Deformationen erfährt. In beiden Fällen ändert sich der Deformationsgradient des Mikrokontinuums nur von Punkt zu Punkt des Makrokontinuums. Die Theorie berücksichtigt demnach neben dem Deformationsgradienten des Makrokontinuums auch den Deformationsgradienten des Mikrokontinuums und seinen Gradienten relativ zu den Ortskoordinaten des Makrokontinuums. Damit werden in einer phänomenologischen Art und Weise Längenabhängigkeiten in das System der Materialgleichungen eingeführt. Die resultierende Kontinuumstheorie heißt mikropolar oder mikromorph, je nachdem ob der Deformationsgradient des Mikrokontinuums eine Rotation oder eine beliebige homogene Deformation beschreibt. Diese Begriffsbildung geht auf ERINGEN [36] zurück. Wie von MINDLIN [73] gezeigt, ist eine mikromorphe Theorie in der Lage, die erwähnten Dispersionsrelationen bei Wellenausbreitungsphänomenen wiederzugeben.

Eine wichtige Eigenschaft mikropolarer und mikromorpher Theorien ist, dass neben dem Spannungstensor sogenannte Momentenspannungen in Erscheinung treten. Die praktische Bedeutung dieses Sachverhalts für einen mikropolaren elastischen Körper wurde von SCHÄFER [76] anhand der reinen Biegung eines Balkens demonstriert. Eine Beziehung zwischen dem mikropolaren Kontinuum und Modellen der Versetzungstheorie wurde zuerst von GÜNTHER [45] hergeleitet.

Wie später von KRÖNER [56] nachgewiesen, sind mit gegebener Versetzungsdichte auch die sogenannten Krümmungen des mikropolaren Kontinuums gegeben.

Mikropolare und mikromorphe Kontinua stellen nicht die einzige Möglichkeit dar, innere Längenskalen mittels partieller Differentialgleichungen zu modellieren. Eine weitere Möglichkeit ist z. B. die Gradiententheorie von AIFANTIS [3]. Diese Theorie ist attraktiv, weil sie ohne Momentenspannungen auskommt und in Bezug auf andere Theorien weniger Materialparameter enthält. Leider ist es bisher nicht gelungen, solche Theorien in zufriedenstellender Weise in einen thermodynamischen Rahmen einzubetten. Aus diesem Grund werden diese in der vorliegenden Arbeit nicht weiter betrachtet. Da ferner mikromorphe Theorien mehr Materialparameter als mikropolare enthalten, werden nur mikropolare Theorien betrachtet.

Obwohl eine mikropolare Elastizitätstheorie relativ früh entwickelt wurde, sind mikropolare Plastizitätstheorien erst in den achtziger Jahren eingeführt worden. Probleme bei der Behandlung von Randwertaufgaben mit lokalen Stoffgesetzen und materialabhängiger Entfestigung (sog. softening) war in den meisten Beiträgen der Anlass dafür. Bei solchen Fällen werden Netzabhängigkeiten in den Finite-Elemente-Lösungen beobachtet, wenn sogenannte kritische Lasten überschritten werden. Mathematisch bedeutet dies, dass das quasistatische Problem die Eigenschaft der Elliptizität verliert und nicht mehr wohl gestellt ist. Folglich konvergieren die Lösungen nicht mehr bzw. werden netzabhängig. Um solche Probleme zu regularisieren, wurden mikropolare Plastizitätstheorien eingesetzt (siehe z. B. DE BORST [15], [16], DE BORST & MÜHLHAUS [17], DIETSCHKE & WILLAM [33], DIETSCHKE ET AL. [32], TEJCHMAN & WU [85], MÜHLHAUS & VARDOULAKIS [71], VARDOULAKIS [94], STEINMANN [81], [83]). Auf der anderen Seite hatten die Rechnungen von SCHÄFER [76] gezeigt, dass signifikante qualitative Unterschiede zwischen klassischer und mikropolarer Elastizität entstehen können, wenn eine der Bauteilabmessungen hinreichend klein wird. Vom Standpunkt der Modellierung von Materialeigenschaften ist es deswegen einleuchtend, zur Beschreibung des Verhaltens von dünnen Filmen oder von Bauteilen der Mikrosystemtechnik mikropolare Modelle einzusetzen. Das Gleiche gilt für mechanische Systeme mit makroskopischen Abmessungen, wenn damit Aspekte der inneren Struktur des Materials in einfacher Weise berücksichtigt werden können. So wurden z. B. von LIPPMANN [62], DIEPOLDER ET AL. [31] und LACHNER [57] mikropolare Plastizitätsmodelle eingeführt, um die Rotation von Körnern bei polykristallinen Materialien während des plastischen Fließens zu berücksichtigen. Interessante mikropolare Plastizitätstheorien wurden auch von BESDO [12], [13] und STEINMANN [81] vorgeschlagen.

Die bisherigen Ausführungen rechtfertigen die Modellierung etwa von metallischen Bauteilen der Mikroelektronik oder metallischen dünnen Filmen im Rahmen der mikropolaren Plastizität. In der Regel werden solche mechanischen Systeme zyklischen Belastungen unterworfen, so dass die Berücksichtigung einer kinematischen Verfestigung sehr wichtig ist. Allerdings wurde eine kinematische Verfestigung nur in FOREST [41] und FOREST ET AL. [40] angenommen, wobei diese lediglich im Sinne der Kristallplastizität mit Hilfe skalarer Variablen berücksichtigt wurde. Außerdem ist die Theorie in den meisten Fällen rein mechanisch formuliert. Eine Ausnahme stellt die Arbeit von STEINMANN [81] dar, bei der isotrope Verfestigung in thermodynamisch konsistenter Form angenommen wurde. Der Term thermodynamisch konsistent drückt in der vorliegenden Arbeit die Eigenschaft aus, dass der zweite Hauptsatz der Thermodynamik ständig

erfüllt wird. Somit lautet das Ziel der vorliegenden Dissertation eine thermodynamisch konsistente Plastizitätstheorie zu entwickeln, welche sowohl isotrope als auch kinematische Verfestigung berücksichtigt. Die Theorie soll für große Deformationen formuliert werden. Dies ist bei zahlreichen praktischen Problemen, z. B. dem Eindruckversuch (sog. microindentation) oder der Mikrobiegung einer dünnen Folie, von Bedeutung. Bei solchen experimentellen Vorgängen treten in der Tat große Deformationen bzw. große Rotationen in Erscheinung. Bei klassischen Plastizitätsmodellen haben sich Evolutionsgleichungen mit Erzeugungs- und Begrenzungstermen sehr bewährt. Solche Ansätze beschreiben nichtlineare Verfestigungseffekte, wie z. B. die Armstrong-Frederick Gleichung für kinematische Verfestigung. Ein Aspekt der vorliegenden Arbeit ist es, Evolutionsgleichungen für die mikropolare Plastizität zu erhalten, welche die Struktur von Erzeugungs- und Begrenzungstermen besitzen. Schließlich ist bekannt, dass bei klassischen Plastizitätstheorien, die auf dem Konzept der Zwischenkonfiguration basieren, der sogenannte Mandelsche Spannungstensor eine entscheidende Rolle spielt. Um die thermodynamische Konsistenz bei kinematischer Verfestigung zu sichern, wird angenommen, dass der Translationstensor (sog. back-stress tensor) auch mit der mathematischen Struktur eines Mandelschen Spannungstensors angegeben werden kann (siehe TSAKMAKIS [89]). Es ist dann von Interesse, die Frage zu klären, ob sich solche bewährten Methoden in geeigneter Form auf die mikropolare Plastizität übertragen lassen.

1.2 Aufbau der Arbeit

Nach einigen einführenden Notationen und Definitionen, werden in Kapitel 2 die kinematischen Grundlagen der Theorie polarer Medien vorgestellt. Dieses beinhaltet die kinematischen und dynamischen Variablen, die für die Formulierung der Theorie notwendig sind. Der thermodynamische Rahmen für mikropolare Plastizität wird in Kapitel 3 erarbeitet. Das Elastizitätsgesetz, die Fließ- und Verfestigungsregeln werden aus dem Zweiten Hauptsatz der Thermodynamik, dem Postulat von Il'iushin und der inneren Dissipationsungleichung abgeleitet. Dies liefert ein elasto-plastisches Materialmodell für das mikropolare Kontinuum. In Kapitel 4 werden die Gleichungen für die Finite-Elemente-Methode hergeleitet. Insbesondere wird auf die Variationsformulierung, die Linearisierung und die Lösung des nichtlinearen Problems eingegangen. In Kapitel 5 wird gezeigt, dass die entwickelte mikropolare Plastizitätstheorie in der Lage ist, Längenskaleneffekte im Materialverhalten wiederzugeben. Dazu wird die Torsion eines Vollzylinders diskutiert. Weitere Eigenschaften der konstitutiven Theorie werden anhand einer gelochten Platte unter Zugbeanspruchung veranschaulicht. Die Arbeit endet mit einigen abschließenden Bemerkungen.

1.3 Voraussetzungen und Notation

Betrachtet werden isotherme Deformationen. $\dot{\varphi}(t)$ bezeichnet dabei die materielle Zeitableitung einer Funktion $\varphi(t)$, wobei t die Zeit ist. Da die Verformungen unabhängig vom Ort im Raum sind, wird in dieser Arbeit von nun an kein expliziter Bezug zur räumlichen Koordinate mehr vorgenommen. Üblicherweise wird zur Beschreibung einer Funktion und des Funktionswertes

an einer Stelle dasselbe Symbol verwendet. Wenn jedoch mit verschiedenen Repräsentationen derselben Funktion gearbeitet wird, wird oft auf unterschiedliche Symbole zurückgegriffen. Für ein reelles x bezeichnet $\langle x \rangle$ die Funktion mit

$$\langle x \rangle := \begin{cases} x & \text{wenn } x \geq 0 \quad , \\ 0 & \text{wenn } x < 0 \quad . \end{cases} \quad (1.1)$$

Tensoren zweiter Stufe sowie Vektoren werden mit fettgedruckten Buchstaben gekennzeichnet. So bezeichnen im einzelnen $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ und $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ das innere Produkt, das Vektorprodukt und das dyadische Produkt zweier Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} . Für zwei Tensoren zweiter Stufe \mathbf{A} und \mathbf{B} bedeuten $\text{tr}\mathbf{A}$, $\det \mathbf{A}$ und \mathbf{A}^T die Spur, die Determinante und die Transponierte, während $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T)$ das innere Produkt zwischen \mathbf{A} und \mathbf{B} und $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}$ die Euklidische Norm von \mathbf{A} ist. Weiterhin stellt

$$\mathbf{1} = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad , \quad (1.2)$$

$i, j = 1, 2, 3$, den Einheitstensor zweiter Stufe dar, wobei $\delta_{ij} = \delta_j^i = \delta_i^j$ das Kronecker-Delta und $\{\mathbf{e}_i\}$ eine orthonormale Basis im dreidimensionalen Euklidischen Vektorraum ist, in dem die Bewegung eines materiellen Körpers betrachtet wird. Außerdem werden die Notationen $\mathbf{A}^D = \mathbf{A} - \frac{1}{3}(\text{tr}\mathbf{A})\mathbf{1}$ für den Deviator von \mathbf{A} und $\mathbf{A}^{T-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$ benutzt, wenn \mathbf{A}^{-1} existiert.

Tensoren dritter und vierter Stufe werden mit kalligraphischen fettgedruckten Buchstaben dargestellt. Seien \mathcal{K} , \mathcal{P} zwei Tensoren vierter Ordnung, \mathbf{A} ein Tensor zweiter Stufe und \mathbf{v} , \mathbf{w} zwei Vektoren, dann gilt bezüglich der orthonormalen Basis $\{\mathbf{e}_i\}$ Folgendes: Werden \mathcal{K} , \mathcal{P} , \mathbf{A} und \mathbf{v} , \mathbf{w} durch $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$, $\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ dargestellt (häufig auch $A_{ij} = (\mathbf{A})_{ij}$) und sind $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{w} = w_i \mathbf{e}_i$, dann gilt

$$\mathcal{K}\mathcal{P} = \mathcal{K}_{ijmn} \mathcal{P}_{mnkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \quad , \quad (1.3)$$

$$\mathcal{K}^T = \mathcal{K}_{ijkl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad , \quad (1.4)$$

$$\mathcal{K}[\mathbf{A}] = \mathcal{K}_{ijmn} A_{mn} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad , \quad (1.5)$$

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A} = A_{ij} A_{jk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \quad , \quad (\mathbf{A}^{-2} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}^{-1}) \quad , \quad (1.6)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = A_{ij} v_j \mathbf{e}_i \quad , \quad (1.7)$$

$$\mathbf{A}[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}\mathbf{w} = v_i A_{ij} w_j \quad . \quad (1.8)$$

Daher ist für zwei Tensoren zweiter Stufe \mathbf{A} , \mathbf{B} und einen Tensor vierter Stufe \mathcal{K}

$$\mathbf{A} \cdot \mathcal{K}[\mathbf{B}] = \mathbf{B} \cdot \mathcal{K}^T[\mathbf{A}] \quad . \quad (1.9)$$

Der Einheitstensor vierter Stufe wird mit \mathcal{I} bezeichnet

$$\mathcal{I} = \delta_{im} \delta_{jn} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n \quad (1.10)$$

und besitzt die Eigenschaft

$$\mathcal{I} = \mathcal{E} + \mathcal{J} \quad (1.11)$$

mit

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_{imjn} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_n = \frac{1}{2}(\delta_{ij}\delta_{mn} + \delta_{in}\delta_{mj}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_n \quad , \quad (1.12)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{J}} = \mathcal{J}_{imjn} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_n = \frac{1}{2}(\delta_{ij}\delta_{mn} - \delta_{in}\delta_{mj}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_n \quad . \quad (1.13)$$

Daher gilt für den symmetrischen und den antisymmetrischen Anteil eines beliebigen Tensors zweiter Stufe \mathbf{A} , bezeichnet mit \mathbf{A}_S und \mathbf{A}_A

$$\mathbf{A}_S = \boldsymbol{\mathcal{E}}[\mathbf{A}] \quad , \quad (1.14)$$

$$\mathbf{A}_A = \boldsymbol{\mathcal{J}}[\mathbf{A}] \quad , \quad (1.15)$$

während

$$\boldsymbol{\mathcal{I}}[\mathbf{A}] = \mathbf{A} \quad . \quad (1.16)$$

Der Tensor vierter Ordnung mit der Eigenschaft

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}[\mathbf{A}] = \mathbf{A}^T \quad (1.17)$$

wird mit $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ bezeichnet. Jeder isotrope Tensor vierter Ordnung $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ besitzt die Darstellung

$$\boldsymbol{\mathcal{K}} = k_1 \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + k_2 \boldsymbol{\mathcal{I}} + k_3 \boldsymbol{\mathcal{S}} \quad , \quad (1.18)$$

wobei k_1, k_2, k_3 skalare Größen sind.

Seien $\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{v}$ Vektoren. Dann gilt

$$\mathbf{v} \times (\mathbf{c} \otimes \mathbf{a}) := (\mathbf{v} \times \mathbf{c}) \otimes \mathbf{a} \quad , \quad (1.19)$$

$$(\mathbf{c} \otimes \mathbf{a}) \times \mathbf{v} := (\mathbf{c} \times \mathbf{v}) \otimes \mathbf{a} \quad , \quad (1.20)$$

so dass

$$\mathbf{v} \times (\mathbf{c} \otimes \mathbf{a}) = -(\mathbf{c} \otimes \mathbf{a}) \times \mathbf{v} \quad . \quad (1.21)$$

Weiterhin ist

$$(\mathbf{A}\mathbf{a} \times \mathbf{A}\mathbf{c}) \cdot \mathbf{A}\mathbf{v} = (\det \mathbf{A})(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{v} \quad . \quad (1.22)$$

Für einen antisymmetrischen Tensor zweiter Stufe \mathbf{W} mit dem axialen Vektor \mathbf{w}

$$\mathbf{w} = \text{axl}(\mathbf{W}) \quad , \quad \mathbf{W} = \text{Spn}(\mathbf{w}) \quad , \quad (1.23)$$

gilt

$$\mathbf{W}\mathbf{c} = \mathbf{w} \times \mathbf{c} \quad . \quad (1.24)$$

Jeder Rotationstensor \mathbf{R} lässt sich als Exponentialabbildung eines antisymmetrischen Tensors \mathbf{W} angeben

$$\mathbf{R} = \exp(\mathbf{W}) = \exp(\text{Spn}(\boldsymbol{\omega})) = \mathbf{1} + \mathbf{W} + \frac{\mathbf{W}^2}{2!} + \frac{\mathbf{W}^3}{3!} + \dots \quad , \quad (1.25)$$

wobei $\boldsymbol{\omega}$ der axiale Vektor von \mathbf{W} ist. Die Exponentialabbildung wiederum lässt sich auch in geschlossener Form angeben (Euler-Rodrigues-Formel)

$$\mathbf{R} = \cos(|\boldsymbol{\omega}|)\mathbf{1} + \frac{\sin(|\boldsymbol{\omega}|)}{|\boldsymbol{\omega}|}\text{Spn}(\boldsymbol{\omega}) + \frac{1 - \cos(|\boldsymbol{\omega}|)}{|\boldsymbol{\omega}|^2}(\boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\omega}) \quad . \quad (1.26)$$

Ein Tensor dritter Stufe $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{ijk}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$ erfüllt die Beziehung

$$\mathcal{M}[\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{v}] = \mathcal{M}_{ijk}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{c})(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{a})(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{v}) \quad . \quad (1.27)$$

Ist $\mathbf{A} = A_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ ein Tensor zweiter Stufe, dann führen $\mathbf{A}\mathcal{M}$, $\mathcal{M}\mathbf{A}^T$ und $\mathbf{A} \diamond \mathcal{M} \equiv \mathcal{M} \diamond \mathbf{A}^T$ auf Tensoren dritter Stufe, für die gilt

$$\mathbf{A}\mathcal{M} := \mathcal{M}_{ijk}(\mathbf{A}\mathbf{e}_i) \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k = A_{mi}\mathcal{M}_{ijk}\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \quad , \quad (1.28)$$

$$\mathcal{M}\mathbf{A}^T := \mathcal{M}_{ijk}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes (\mathbf{A}\mathbf{e}_k) = \mathcal{M}_{ijk}A_{mk}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_m \quad , \quad (1.29)$$

$$\mathbf{A} \diamond \mathcal{M} \equiv \mathcal{M} \diamond \mathbf{A}^T := \mathcal{M}_{ijk}\mathbf{e}_i \otimes (\mathbf{A}\mathbf{e}_j) \otimes \mathbf{e}_k = \mathcal{M}_{ijk}A_{mj}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_k \quad , \quad (1.30)$$

wobei $\mathcal{M}[\mathbf{A}]$ den Vektor

$$\mathcal{M}[\mathbf{A}] = \mathcal{M}_{ijk}A_{jk}\mathbf{e}_i \quad (1.31)$$

repräsentiert. Für einen gegebenen Tensor \mathbf{A} wird ein linearer Operator $\mathcal{L}(\mathbf{A})$ eingeführt, der wie folgt auf den Raum aller Tensoren dritter Stufe wirkt:

$$\mathcal{L}(\mathbf{A})[\mathcal{M}] = \mathcal{M}_{ijk}(\mathbf{A}\mathbf{e}_i) \otimes (\mathbf{A}\mathbf{e}_j) \otimes (\mathbf{A}\mathbf{e}_k) \quad . \quad (1.32)$$

So gilt für den Spezialfall $\mathcal{M} = \mathbf{B} \otimes \mathbf{u}$, in dem \mathbf{B} und \mathbf{u} ein Tensor zweiter Stufe und ein Vektor sind,

$$\mathbf{A}\mathcal{M} = \mathbf{A}(\mathbf{B} \otimes \mathbf{u}) = (\mathbf{A}\mathbf{B}) \otimes \mathbf{u} \quad , \quad (1.33)$$

$$\mathcal{M}\mathbf{A}^T = (\mathbf{B} \otimes \mathbf{u})\mathbf{A}^T = \mathbf{B} \otimes (\mathbf{A}\mathbf{u}) \quad , \quad (1.34)$$

$$\mathbf{A} \diamond \mathcal{M} \equiv \mathcal{M} \diamond \mathbf{A}^T = (\mathbf{B}\mathbf{A}^T) \otimes \mathbf{u} \quad (1.35)$$

sowie

$$\mathcal{M}[\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{v}] = \mathbf{B}[\mathbf{c}, \mathbf{b}](\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{B}\mathbf{b})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \quad . \quad (1.36)$$

Ist \mathbf{B} antisymmetrisch mit dem zugehörigen axialen Vektor \mathbf{w}_b , so ist

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{v}] &= \mathbf{c} \cdot (\mathbf{w}_b \times \mathbf{a})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = -\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{w}_b \otimes \mathbf{u})\mathbf{v} \\ &= -(\mathbf{a} \times \mathbf{w}_b \otimes \mathbf{u})[\mathbf{c}, \mathbf{v}] = ((\mathbf{w}_b \otimes \mathbf{u}) \times \mathbf{a})[\mathbf{c}, \mathbf{v}] \quad . \end{aligned} \quad (1.37)$$

1.4 Symbole

Fettgedruckte Arabische Zahlen

- 1** Einheitstensor zweiter Stufe
- 0** Nullvektor, Nulltensor

Fettgedruckte Lateinische Großbuchstaben

- B** Linker Cauchy-Green-Tensor
- C** Rechter Cauchy-Green-Tensor
- D** Symmetrischer Anteil des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten **L**
- F** Deformationsgradient, globaler Kraftvektor
- G_i** Krummliniger Basisvektor in der Referenzkonfiguration $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$
- G^k** Krummliniger reziproker Basisvektor zu **G_i**
- K** Mikropolarer Krümmungstensor zweiter Stufe, globale Steifigkeitsmatrix
- L** Räumlicher Geschwindigkeitsgradient
- $\hat{\mathbf{P}}$** Mandelscher Spannungstensor in der Zwischenkonfiguration
- $\hat{\mathbf{P}}_c$** Mandelscher Momentenspannungstensor in der Zwischenkonfiguration
- Q** Rotationstensor bei überlagerter Starrkörperrotation
- R** Rotationstensor, Rotationstensor aus der polaren Zerlegung von **F**
- $\bar{\mathbf{R}}$** Rotationstensor des mikropolaren Kontinuums
- S** Gewichteter Cauchyscher Spannungstensor
- S_c** Gewichteter Momentenspannungstensor
- T** Cauchyscher Spannungstensor
- T_c** Momentenspannungstensor
- U** Rechter Strecktensor aus der polaren Zerlegung von **F**
- $\bar{\mathbf{U}}$** Rechter mikropolarer Strecktensor
- V** Linker Strecktensor aus der polaren Zerlegung von **F**
- $\bar{\mathbf{V}}$** Linker mikropolarer Strecktensor
- W** Antisymmetrischer Anteil des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten **L**
- Y** Innere Variable vom Dehnungstyp zur Beschreibung der kinematischen Verfestigung
- Y_c** Innere Variable vom Krümmungstyp zur Beschreibung der kinematischen Verfestigung
- X** Ortsvektor in der Referenzkonfiguration $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$
- dX** Linienelement in $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ mit Ortsvektor **X**
- Z** Innere Variable vom Spannungstyp zur Beschreibung der kinematischen Verfestigung
- Z_c** Innere Variable vom Momentenspannungstyp zur Beschreibung der kinematischen Verfestigung

Fettgedruckte Lateinische Kleinbuchstaben

b	Volumenkraftdichte in der aktuellen Konfiguration \mathcal{R}_t
b_c	Volumenmomentendichte in der aktuellen Konfiguration \mathcal{R}_t
d	Globaler Lösungsvektor des Finite-Elemente-Problems
d_A^u	Knotenpunktsverschiebung
d_A^ω	Knotenpunktsrotation
e_i	Kartesischer Basisvektor in der aktuellen Konfiguration \mathcal{R}_t
g^k	Krummliniger Basisvektor in der aktuellen Konfiguration \mathcal{R}_t
g^k	Reziproker krummliniger Basisvektor zu g^k
h	Mikropolarer Krümmungstensor
ĥ	Menge aus inneren Zustandsvariablen
m_k	Basisvektor in der aktuellen Konfiguration \mathcal{R}_t
n	Einheitsnormalenvektor der Oberfläche $\partial\mathcal{R}_t$
q	Wärmeflussvektor bzgl. der aktuellen Konfiguration \mathcal{R}_t
t	Spannungsvektor
t_c	Momentenspannungsvektor
u	Verschiebungsvektor
δu	Virtueller Verschiebungsvektor
δv	Virtueller Rotationsvektor
w	Axialer Vektor eines antisymmetrischen Tensors zweiter Stufe W
x	Ortsvektor in der aktuellen Konfiguration \mathcal{R}_t
dx	Linielement in \mathcal{R}_R mit Ortsvektor x
ŷ	Verallgemeinerter Verzerrungs-Krümmungsvektor

Lateinische Großbuchstaben

E	Dreidimensionaler Euklidischer Punktraum
L	Belastungsfaktor
R	Innere Variable vom Spannungstyp zur Beschreibung der isotropen Verfestigung
W	Leistung der inneren Kräfte oder Momente pro Einheitsvolumen

Lateinische Kleinbuchstaben

e	Spezifische innere Energie
f	Fließfunktion
h_i	Innere Zustandsvariablen zur Beschreibung der Verfestigung
k	Skalarwertige Spannung
n_e	Anzahl der Elemente im Finite-Elemente-Modell
n_s	Anzahl der Gauß-Punkte
r	Innere Variable vom Dehnungstyp zur Beschreibung der isotropen Verfestigung
r_{hs}	Spezifische innere Wärme pro Masse
s	Plastische Bogenlänge
t	Zeit

Fettgedruckte Griechische Großbuchstaben

- Γ_k Antisymmetrischer Tensor zweiter Stufe in \mathcal{R}_t
- Φ Ortsvektor in der Referenzkonfiguration $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$
- Φ_i Direktoren in $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$
- $\hat{\Lambda}_p$ Verallgemeinerter Verzerrungs-Krümmungsvektor
- Ω Antisymmetrischer mikropolarer Spintensor

Fettgedruckte Griechische Kleinbuchstaben

- γ_k Axialer Vektor von Γ_k
- ϵ Mikropolarer Eulerscher Verzerrungstensor
- φ Vektor in der aktuellen Konfiguration \mathcal{R}_t
- φ_i Direktoren in \mathcal{R}_t
- $\hat{\sigma}$ Verallgemeinerter Spannungs-Momentanspannungsvektor
- σ_c Eigendrehimpuls
- $\hat{\chi}$ Translationstensor (back-stress-couple-stress Tensor)
- $\hat{\xi}$ Translationstensor der kinematischen Verfestigung
in der plastischen Zwischenkonfiguration $\hat{\mathcal{R}}_t$ (Spannungstyp)
- $\hat{\xi}_c$ Translationstensor der kinematischen Verfestigung
in der plastischen Zwischenkonfiguration $\hat{\mathcal{R}}_t$ (Momentenspannungstyp)
- ω Axialer Vektor des mikropolaren Spintensors

Griechische Buchstaben

- Δ Skalarwertige Differenz
- δ_{ij} Kronecker-Delta
- ϑ^k Konvektive Koordinaten
- Ψ Spezifische Verzerrungsenergiefunktion
- ρ Massendichte in der aktuellen Konfiguration \mathcal{R}_t

Fettgedruckte Kalligraphische Buchstaben

- \mathcal{E} Symmetrischer Anteil von \mathcal{I}
- \mathcal{I} Einheitstensor vierter Stufe
- \mathcal{J} Antisymmetrischer Anteil von \mathcal{I}
- \mathcal{S} Liefert die Transposition eines Tensors zweiter Stufe
- \mathcal{K} Mikropolarer Verzerrungstensor

Kalligraphische Buchstaben

\mathcal{B}	Materieller Körper
\mathcal{D}_{int}	Innere Dissipation
\mathcal{F}	Funktional
$\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$	Referenzkonfiguration
\mathcal{R}_t	Aktuelle Konfiguration
$\hat{\mathcal{R}}_t$	Plastische Zwischenkonfiguration
\mathcal{X}	Materieller Körperpunkt in \mathcal{B}

Operatoren

axl	Axialer Vektor eines Tensors zweiter Stufe
det	Determinante
div	Divergenz
exp	Exponentialabbildung
GRAD	Gradientenoperator in Bezug auf \mathbf{X}
grad	Gradientenoperator in Bezug auf \mathbf{x}
tr	Spur
Spn	Antisymmetrischer Tensor zum axialen Vektor
$\nabla_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}}$	Gradientenoperator bezüglich $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$
$\nabla_{\mathcal{R}_t}$	Gradientenoperator bezüglich aktueller Konfiguration \mathcal{R}_t
$\nabla_{\hat{\mathcal{R}}_t}$	Gradientenoperator bezüglich plastischer Zwischenkonfiguration \mathcal{R}_t
\mathcal{L}	Linearer Operator

Indizes

$(\cdot)^T$	Transponierte eines Tensors
$(\cdot)^{-1}$	Inverse eines Tensors
$(\cdot)_S$	Symmetrischer Anteil eines Tensors
$(\cdot)_A$	Antisymmetrischer Anteil eines Tensors
$(\cdot)^D$	Deviator eines Tensors
$(\cdot)^*$	Transformierte Größe
$(\cdot)_{\mathcal{R}_t}$	Größe in der aktuellen Konfiguration
$(\cdot)_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}}$	Größe in der Referenzkonfiguration
$(\cdot)_e$	Elastischer Anteil
$(\cdot)_p$	Plastischer Anteil
$(\cdot)_s$	Verzerrung, Spannung
$(\cdot)_c$	Krümmung, Momentenspannung
$\tilde{(\cdot)}$	Größe in der Referenzkonfiguration
$\hat{(\cdot)}$	Größe in der plastischen Zwischenkonfiguration

$\bar{(\cdot)}$	Mikropolare Größe
$\check{(\cdot)}$	Gestörte Größe
$(\cdot)^{(is)}$	Anteil aus isotroper Verfestigung
$(\cdot)^{(kin)}$	Anteil aus kinematischer Verfestigung
$\dot{(\cdot)}$	Materielle Zeitableitung
$\overset{\diamond}{\dot{(\cdot)}}$	Objektive Zeitableitung
$(\cdot)_0$	Größe zu Beginn (Zeit t_0)
$(\cdot)_e$	Größe am Ende (Zeit t_e)
$I(\cdot)$	Werte im ersten Operator
$II(\cdot)$	Werte im zweiten Operator

2 Grundlagen des mikropolaren Kontinuums

In diesem Kapitel werden die Grundlagen des mikropolaren Kontinuums, wie sie in GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS [46] entwickelt wurden, beschrieben. Vieles davon greift auf Ideen von STEINMANN [81] zurück. Lehrbücher zur klassischen Kontinuumsmechanik sind beispielsweise CHADWICK [22], GURTIN [48], LEIGH [59], FUNG [43], [44], TRUESDELL ET AL. [87], [86], WANG & TRUESDELL [96], MALVERN [68], MARSDEN & HUGHES [69], OGDEN [74], LEMAITRE & CHABOCHE [60], ALTENBACH & ALTENBACH [5], BECKER & BÜRGER [10], HAUPT [50] und LIU [63].

2.1 Grundbegriffe der Kinematik

Betrachtet wird ein materieller Körper \mathcal{B} , der im dreidimensionalen Euklidischen Punktraum E den Raumbereich $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ einnimmt, welcher als Referenzkonfiguration bezeichnet wird. Dabei wird angenommen, dass es sich um die Konfiguration handelt, die zur Zeit $t = 0$ eingenommen wird. Nach Wahl eines Ursprungs (Nullpunkts) in E , kann jeder materielle Körperpunkt \mathcal{X} aus \mathcal{B} durch den Ortsvektor \mathbf{X} zum Punkt X in $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$, der von diesem materiellen Punkt eingenommen wird, identifiziert werden. Mit \mathbf{x} wird der Ortsvektor zum Punkt x bezeichnet, der vom selben materiellen Punkt zur Zeit t in der aktuellen Konfiguration eingenommen wird. In dieser Konfiguration nimmt der materielle Körper \mathcal{B} den Raumbereich \mathcal{R}_t in E ein.

Eine Bewegung des materiellen Körpers \mathcal{B} in E ist eine mit der Zeit t parametrisierte Schar von Konfigurationen und stellt eine Abbildung

$$\bar{\mathbf{x}} : (\mathbf{X}, t) \mapsto \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) \quad (2.1)$$

dar, die für eine feste Zeit t eine Inverse $\mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t)$ besitzt. Es wird angenommen, dass alle Funktionen stetige Ableitungen bis zur gewünschten Ordnung bezüglich räumlicher Variablen und der Zeit t besitzen.

Der Deformationsgradient \mathbf{F} , der zur Bewegung (2.1) gehört, ist gegeben durch

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{X}} = \text{GRAD} \bar{\mathbf{x}} \quad , \quad (2.2)$$

wobei $\det \mathbf{F} > 0$ vorausgesetzt wird. Hierbei muss unterschieden werden zwischen GRAD und

grad, die jeweils den Gradientenoperator in Bezug auf \mathbf{X} und \mathbf{x} darstellen. Der rechte Cauchy-Green-Tensor \mathbf{C} und der linke Cauchy-Green-Tensor \mathbf{B} sind gegeben durch

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 \quad , \quad (2.3)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2 \quad , \quad (2.4)$$

wobei \mathbf{U} und \mathbf{V} jeweils den rechten und linken Strecktensor darstellen. Sie sind symmetrische und positiv definite Tensoren zweiter Stufe und kommen in der polaren Zerlegung von \mathbf{F}

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{V} \mathbf{R} \quad (2.5)$$

vor, wobei \mathbf{R} ein eigentlich orthogonaler Tensor zweiter Stufe ist.

2.2 Mikropolares Kontinuum

Ein mikropolares Material wird in Anlehnung an ERINGEN [35] und ERINGEN & SUHUBI [38] als ein Kontinuum definiert, bei dem an jeden einzelnen materiellen Punkt eine Substruktur angeheftet ist. Diese verhält sich wie ein starrer Körper, der rotieren kann und den Rotations-tensor $\bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{R}}(\mathbf{X}, t)$ besitzt. Der Tensor $\bar{\mathbf{R}}$ stellt demnach, genauso wie der Deformationsgradient \mathbf{F} , ein Zweipunkttensofeld dar, so dass $\bar{\mathbf{R}}(\mathbf{X}, t)$ auf einen Ortsvektor Φ wirkt, der an einen Punkt mit Ortsvektor \mathbf{X} in $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ angeheftet ist. Er liefert einen Ortsvektor φ , der an einen Punkt mit Ortsvektor \mathbf{x} in \mathcal{R}_t gebunden ist (siehe Abbildung 2.1)

$$\varphi = \bar{\mathbf{R}} \Phi \quad . \quad (2.6)$$

Ferner wird vorausgesetzt, dass $\bar{\mathbf{R}}$ bei beliebigen auf der aktuellen Konfiguration \mathcal{R}_t überlagerten Starrkörperrotationen \mathbf{Q} ähnliche Transformationsbeziehungen erfüllt wie \mathbf{F} :

$$\bar{\mathbf{R}} \rightarrow \bar{\mathbf{R}}^* = \mathbf{Q} \bar{\mathbf{R}} \quad . \quad (2.7)$$

(Weitere Transformationsbeziehungen sind in Anhang A gegeben.)

Die Definition typischer kinematischer Größen für mikropolare Kontinua kann am besten auf der Grundlage reiner Elastizität motiviert werden. Es wird eine spezifische Verzerrungsenergiefunktion Ψ angenommen, die bei einem mikropolaren Material von \mathbf{F} , $\bar{\mathbf{R}}$ und $\text{GRAD} \bar{\mathbf{R}}$ abhängt,

$$\Psi = \bar{\Psi}(\mathbf{F}, \bar{\mathbf{R}}, \text{GRAD} \bar{\mathbf{R}}) \quad . \quad (2.8)$$

Neben dem Einfluss des klassischen Deformationsgradienten und des mikropolaren Rotations-tensors wird durch dessen Gradienten, einem Tensor dritter Stufe, eine zusätzliche Abhängigkeit von der Nachbarschaft des materiellen Punktes berücksichtigt. Das heißt, $\text{GRAD} \bar{\mathbf{R}}$ dient demnach dazu, in der Theorie eine innere Längenabhängigkeit miteinzubeziehen.

Sei $\{\vartheta^k\}$, $k = 1, 2, 3$ ein konvektives Koordinatensystem, und o. B. d. A. kartesisch in der Bezugskonfiguration. Seien ferner \mathbf{G}_k und \mathbf{g}_k jeweils die Basisvektoren in der Bezugs- und der

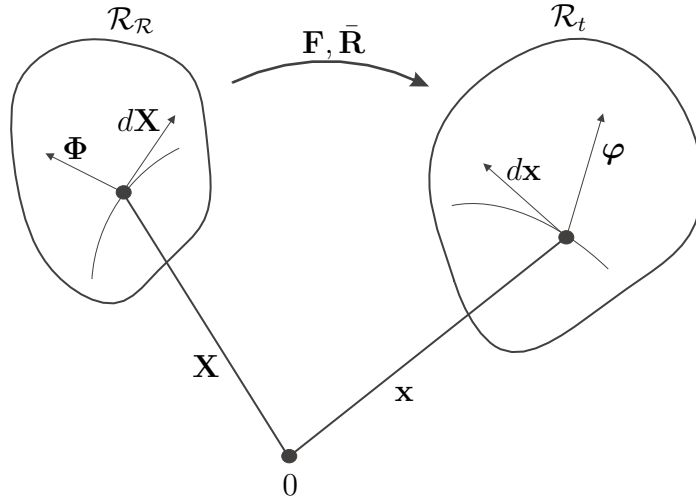


Abbildung 2.1: $\mathbf{F}, \bar{\mathbf{R}}$ wirken auf Vektoren in $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ und liefern Vektoren in \mathcal{R}_t .

Momentankonfiguration, die tangential zur k -ten Koordinatenlinie sind. Die reziproken Basisvektoren zu \mathbf{G}_k und \mathbf{g}_k werden jeweils mit \mathbf{G}^k und \mathbf{g}^k bezeichnet. Dann gilt

$$\mathbf{G}_k \equiv \mathbf{G}^k \quad , \quad \mathbf{G}_k \cdot \mathbf{G}_i = \delta_{ki} \quad , \quad (2.9)$$

$$\mathbf{g}_k = \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{F}\mathbf{G}_k \quad , \quad \mathbf{g}^k = \mathbf{g}^k(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^{T-1}\mathbf{G}_k \quad , \quad \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_k = \delta_k^i \quad . \quad (2.10)$$

Mit $\mathbf{m}_k = \mathbf{m}_k(\mathbf{x}, t)$ wird für den späteren Gebrauch die orthogonale Basis bezeichnet, die in der aktuellen Konfiguration definiert ist als

$$\mathbf{m}_k := \bar{\mathbf{R}}\mathbf{G}_k \quad . \quad (2.11)$$

Offensichtlich kann $\bar{\mathbf{R}}$ als eine Funktion von ϑ^k angesehen werden, so dass gilt

$$\text{GRAD}\bar{\mathbf{R}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial \vartheta^k} \otimes \mathbf{G}_k \quad . \quad (2.12)$$

Wegen Gleichung (2.7), transformiert sich $\text{GRAD}\bar{\mathbf{R}}$ wie folgt

$$(\text{GRAD}\bar{\mathbf{R}})^* = \mathbf{Q}\text{GRAD}\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{Q}\frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial \vartheta^k} \otimes \mathbf{G}_k \quad . \quad (2.13)$$

Es ist zweckmäßig, die Tensoren $\bar{\mathbf{U}}$ und $\bar{\mathbf{V}}$ wie folgt einzuführen (siehe auch ERINGEN & KAFADAR [37] und STEINMANN [81])

$$\mathbf{F} = \bar{\mathbf{R}}\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{R}} \quad . \quad (2.14)$$

Im Gegensatz zum linken und rechten Strecktensor aus der polaren Zerlegung (2.5) sind $\bar{\mathbf{U}}$ und $\bar{\mathbf{V}}$ nicht symmetrisch.

Durch Anwendung des Prinzips der materiellen Objektivität wird die Gültigkeit der Transformationsbeziehung $\Psi^* = \Psi$, d. h.

$$\Psi = \bar{\Psi}(\mathbf{Q}\mathbf{F}, \mathbf{Q}\bar{\mathbf{R}}, \mathbf{Q}\text{GRAD}\bar{\mathbf{R}}) \quad (2.15)$$

verlangt, die für jeden eigentlich orthogonalen Tensor zweiter Stufe $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t)$ erfüllt sein muss. Wird insbesondere $\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{R}}^T$ gewählt, dann gilt

$$\Psi = \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{U}}, \mathbf{1}, \bar{\mathbf{R}}^T \text{GRAD}\bar{\mathbf{R}}) \quad (2.16)$$

oder

$$\Psi = \bar{\bar{\Psi}}(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}, \tilde{\boldsymbol{\mathcal{K}}}) \quad , \quad (2.17)$$

wobei

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} := \bar{\mathbf{U}} - \mathbf{1} \quad , \quad (2.18)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{K}}} := \bar{\mathbf{R}}^T \text{GRAD}\bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{R}}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial \vartheta^k} \otimes \mathbf{G}_k \quad . \quad (2.19)$$

Somit ist die Abhängigkeit der spezifischen Verzerrungsenergiefunktion auf die zwei Größen $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ und $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{K}}}$ reduziert. Diese werden mikropolarer Lagrangescher Verzerrungs- bzw. mikropolarer Lagrangescher Krümmungstensor genannt. Eine geometrische Interpretation wird in Kapitel 2.3 gegeben.

Mit der Definition

$$\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_k := \bar{\mathbf{R}}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial \vartheta^k} \quad (2.20)$$

wird deutlich, dass

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{K}}} = \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_k \otimes \mathbf{G}_k \quad . \quad (2.21)$$

Zu beachten ist, dass $\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_k = \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_k(\mathbf{X}, t)$ einen antisymmetrischen Tensor zweiter Stufe und $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{K}}}$ einen Tensor dritter Stufe darstellen, die beide in der Referenzkonfiguration wirken.

2.3 Mikropolare Verzerrungs- und Krümmungstensoren

Sei $d\mathbf{X}$ ein Linienelement an einem Punkt in der Referenzkonfiguration mit dem Ortsvektor \mathbf{X} , und $\boldsymbol{\Phi}$ ein Vektor, der am selben Punkt angeheftet ist. Infolge des Deformationsprozesses transformiert sich $d\mathbf{X}$ mit Hilfe des Deformationsgradienten \mathbf{F} zum Linienelement $d\mathbf{x}$ in der aktuellen Konfiguration

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \quad . \quad (2.22)$$

Das Linienelement $d\mathbf{x}$ ist dabei am Punkt mit dem Ortsvektor $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t)$ gebunden. Wenn andererseits $\boldsymbol{\Phi} = \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{X})$ als ein Ortsvektor für die Substruktur gedacht wird, die am Punkt \mathbf{X}

angeheftet ist, dann wird Φ gemäß Gleichung (2.6) mittels $\bar{\mathbf{R}}$ zu einem Vektor $\varphi = \bar{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ in der aktuellen Konfiguration gedreht, der als ein Ortsvektor für die Substruktur am Punkt \mathbf{x} fungiert.

Durch die Betrachtung der skalarwertigen Differenz

$$\Delta_s := \varphi \cdot d\mathbf{x} - \Phi \cdot d\mathbf{X} \quad (2.23)$$

können verschiedene Gegenstücke des mikropolaren Verzerrungstensors $\tilde{\epsilon}$ eingeführt werden. Für die Differenz wird Forminvarianz bezüglich der gewählten Konfiguration verlangt. Werden zum Beispiel die Gleichungen (2.6) und (2.22) benutzt, dann gilt

$$\Delta_s = \Phi \cdot (\bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) d\mathbf{X} = \Phi \cdot (\bar{\mathbf{U}} - \mathbf{1}) d\mathbf{X} \quad (2.24)$$

$$= \varphi \cdot (\mathbf{1} - \bar{\mathbf{R}} \mathbf{F}^{-1}) d\mathbf{x} = \varphi \cdot (\mathbf{1} - \bar{\mathbf{V}}^{-1}) d\mathbf{x} \quad (2.25)$$

oder

$$\Delta_s = \Phi \cdot \tilde{\epsilon} d\mathbf{X} = \varphi \cdot \epsilon d\mathbf{x} \quad , \quad (2.26)$$

wobei

$$\epsilon := \mathbf{1} - \bar{\mathbf{V}}^{-1} = \bar{\mathbf{R}} \tilde{\epsilon} \mathbf{F}^{-1} \quad . \quad (2.27)$$

Dabei wird ϵ als der mikropolare Eulersche Verzerrungstensor bezeichnet. Somit wirken nun in einer forminvarianten Art und Weise ϵ und $\tilde{\epsilon}$ jeweils auf materielle Linienelemente und Vektoren in der Momentan- und Referenzkonfiguration, die zu der betrachteten Mikrostruktur gehören und die Differenz Δ_s erfüllen.

Um auch $\tilde{\mathcal{K}}$ geometrisch interpretieren zu können, werden drei zeitunabhängige Vektoren $\Phi_i = \Phi_i(\mathbf{X})$ betrachtet, die auch Direktoren genannt werden. Diese sind linear unabhängig und charakterisieren die Substruktur am Punkt \mathbf{X} (siehe auch ERINGEN [36], Kapitel 1.0-1.4). Die Substruktur kann so am Punkt \mathbf{x} durch die Direktoren

$$\varphi_i = \varphi_i(\mathbf{x}, t) := \bar{\mathbf{R}} \Phi_i \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.28)$$

beschrieben werden. Ein Maß für die Rotation der Substruktur an einem materiellen Punkt, das zusätzlich der Rotation der Substrukturen an benachbart angehefteten Punkten Rechnung trägt, kann beispielsweise durch die Bildung der folgenden Differenz eingeführt werden

$$\varphi_1 \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial \vartheta^k} - \Phi_1 \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial \vartheta^k} = \bar{\mathbf{R}} \Phi_1 \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial \vartheta^k} \Phi_2 + \bar{\mathbf{R}} \Phi_1 \cdot \bar{\mathbf{R}} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \vartheta^k} - \Phi_1 \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial \vartheta^k} \quad (2.29)$$

$$= \Phi_1 \cdot \left(\bar{\mathbf{R}}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial \vartheta^k} \right) \Phi_2 \quad (2.30)$$

$$= \Phi_1 \cdot \tilde{\Gamma}_k \Phi_2 \quad . \quad (2.31)$$

Diese Differenz hängt vom Index k ab. Um zu einer indexfreien Notation zu gelangen, wird Φ_3 umgeschrieben in die Form

$$\Phi_3 = (\Phi_3)_k \mathbf{G}_k \quad (2.32)$$

und Gleichung (2.31) mit $(\Phi_3)_k = \Phi_3 \cdot \mathbf{G}_k$ multipliziert. Unter Berücksichtigung der Beziehungen (1.36) und (2.21), gilt dann einerseits

$$\Delta_c := \varphi_1 \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial \vartheta^k} (\Phi_3)_k - \Phi_1 \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial \vartheta^k} (\Phi_3 \cdot \mathbf{G}_k) \quad , \quad (2.33)$$

und andererseits

$$\Delta_c = (\Phi_1 \cdot \tilde{\Gamma}_k \Phi_2) (\Phi_3 \cdot \mathbf{G}_k) \quad (2.34)$$

$$= \tilde{\mathcal{K}}[\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3] \quad . \quad (2.35)$$

Es sei daran erinnert, dass auf Grund von Gleichung (2.32) und (2.11) gilt

$$\varphi_3 = \bar{\mathbf{R}} \Phi_3 = (\Phi_3)_k \mathbf{m}_k \quad . \quad (2.36)$$

Daher folgt aus (2.33) infolge von $(\Phi_3)_k = \varphi_3 \cdot \mathbf{m}_k$

$$\Delta_c = \varphi_1 \cdot \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \vartheta^k} \otimes \mathbf{m}_k \right) \varphi_3 - \Phi_1 \cdot \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \vartheta^k} \otimes \mathbf{G}_k \right) \Phi_3 \quad . \quad (2.37)$$

Darüber hinaus werden die Definitionen

$$\nabla_{\mathcal{R}_R} \Phi_2 := \text{GRAD} \Phi_2 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \vartheta^k} \otimes \mathbf{G}_k \quad , \quad (2.38)$$

$$\nabla_{\mathcal{R}_t} \varphi_2 := \frac{\partial \varphi_2}{\partial \vartheta^k} \otimes \mathbf{m}_k \quad (2.39)$$

verwendet, um (2.37) und (2.35) in der Form

$$\Delta_c = \varphi_1 \cdot (\nabla_{\mathcal{R}_t} \varphi_2) [\varphi_3] - \Phi_1 \cdot (\nabla_{\mathcal{R}_R} \Phi_2) [\Phi_3] \quad (2.40)$$

$$= \tilde{\mathcal{K}}[\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3] \quad (2.41)$$

umzuschreiben. Dies führt zu einer geometrischen Interpretation des Krümmungstensors $\tilde{\mathcal{K}}$. Zu beachten ist, dass $\bar{\mathbf{R}}$ keine globalen Kompatibilitätsbedingungen erfüllt, so dass $\nabla_{\mathcal{R}_t}$ im Gegensatz zu $\nabla_{\mathcal{R}_R}$ im Allgemeinen keinen Gradientenoperator bezüglich \mathcal{R}_t darstellt. (Letzterer ist definiert durch $\text{grad} \varphi_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \vartheta^k} \otimes \mathbf{g}^k$.)

Da $\tilde{\Gamma}_k$ ein antisymmetrischer Tensor ist, kann er durch seinen axialen Vektor

$$\tilde{\gamma}_k = \text{axl}(\tilde{\Gamma}_k) \quad (2.42)$$

dargestellt werden. Beim Umgang mit mikropolaren Theorien ist es üblich, mit Krümmungstensoren zweiter Stufe

$$\tilde{\mathbf{K}} := \tilde{\gamma}_k \otimes \mathbf{G}_k \quad (2.43)$$

anstelle von Krümmungstensoren dritter Stufe zu arbeiten (siehe ERINGEN [36], Kapitel 1.0-1.5). Aus (2.34) und (1.37) folgt

$$\Delta_c = \Phi_1 \cdot (\tilde{\gamma}_k \times \Phi_2) (\Phi_3 \cdot \mathbf{G}_k) \quad (2.44)$$

$$= ((\tilde{\gamma}_k \otimes \mathbf{G}_k) \times \Phi_2) [\Phi_1, \Phi_3] \quad (2.45)$$

oder

$$\Delta_c = (\tilde{\mathbf{K}} \times \Phi_2)[\Phi_1, \Phi_3] \equiv \Phi_1 \cdot (\tilde{\mathbf{K}} \times \Phi_2)\Phi_3 \quad . \quad (2.46)$$

Von der Differenz Δ_c wird die Forminvarianz bezüglich der gewählten Konfiguration verlangt. Dies führt auf verschiedene Transformationen der Tensoren $\tilde{\mathcal{K}}$, $\tilde{\Gamma}_k$, $\tilde{\gamma}_k$ und $\tilde{\mathbf{K}}$. Insbesondere gelten die folgenden Beziehungen bezüglich der aktuellen Konfiguration

$$\Delta_c = \mathcal{K}[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3] \quad (2.47)$$

$$= \varphi_1 \cdot (\gamma_k \times \varphi_2)(\varphi_3 \cdot \mathbf{m}_k) \quad (2.48)$$

$$= ((\gamma_k \otimes \mathbf{m}_k) \times \varphi_2)[\varphi_1, \varphi_3] \quad (2.49)$$

$$= (\mathbf{K} \times \varphi_2)[\varphi_1, \varphi_3] \quad , \quad (2.50)$$

wobei

$$\mathcal{K} = \Gamma_k \otimes \mathbf{m}_k = \mathcal{L}(\bar{\mathbf{R}})[\tilde{\mathcal{K}}] \quad , \quad (2.51)$$

$$\Gamma_k = -\Gamma_k^T := \bar{\mathbf{R}}\tilde{\Gamma}_k\bar{\mathbf{R}}^T = \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial y^k}\bar{\mathbf{R}}^T \quad , \quad (2.52)$$

$$\mathbf{K} := \bar{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{R}}^T = \gamma_k \otimes \mathbf{m}_k \quad , \quad (2.53)$$

$$\gamma_k = \bar{\mathbf{R}}\tilde{\gamma}_k = \text{axl}(\Gamma_k) \quad (2.54)$$

und die Beziehungen (1.19) bis (1.37) verwendet wurden.

2.4 Mikropolare Verzerrungs- und Krümmungsgeschwindigkeiten

Jedem mikropolaren Verzerrungs- und Krümmungstensor kann eine objektive Zeitableitung zugewiesen werden, falls die Forminvarianz der materiellen Zeitableitung der Differenz $\dot{\Delta}_s$ und $\dot{\Delta}_c$ in Bezug auf die betrachtete Konfiguration verlangt wird.

Da $d\mathbf{X}$ und Φ in (2.26) als zeitunabhängige Vektorfelder angenommen werden, ergibt sich aus Gleichung (2.22) und (2.6)

$$(d\mathbf{x})' = \mathbf{L}d\mathbf{x} \quad , \quad (2.55)$$

$$\dot{\varphi} = \Omega\varphi \quad , \quad (2.56)$$

mit

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \text{grad}\dot{\mathbf{x}} \quad , \quad (2.57)$$

$$\Omega = \dot{\bar{\mathbf{R}}}\bar{\mathbf{R}}^T \quad . \quad (2.58)$$

Ω stellt einen antisymmetrischen Tensor dar, der in der aktuellen Konfiguration wirkt und dessen axialer Vektor mit

$$\omega = \text{axl}(\Omega) \quad (2.59)$$

bezeichnet wird, während \mathbf{L} die Zerlegung

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (2.60)$$

besitzt, mit dem symmetrischen und antisymmetrischen Anteil

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \quad , \quad (2.61)$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad . \quad (2.62)$$

Aus Gleichung (2.26) folgt dann

$$\dot{\Delta}_s = \Phi \cdot \dot{\epsilon} d\mathbf{X} = \varphi \cdot \dot{\epsilon} d\mathbf{x} \quad , \quad (2.63)$$

wobei $\overset{\diamond}{\epsilon}$ die objektive Zeitableitung von ϵ bezeichnet und gegeben ist durch

$$\overset{\diamond}{\epsilon} = \dot{\epsilon} - \Omega\epsilon + \epsilon\mathbf{L} = \bar{\mathbf{R}}\dot{\bar{\epsilon}}\bar{\mathbf{F}}^{-1} \quad . \quad (2.64)$$

Die Tensoren $\dot{\bar{\epsilon}}$ und $\overset{\diamond}{\epsilon}$ sind demnach die objektiven Zeitableitungen von $\bar{\epsilon}$ und ϵ in der entsprechenden Konfiguration. Ein Vergleich von (2.27)₂ mit (2.64)₂ lässt erkennen, dass die Transformationsbeziehungen zwischen den objektiven Verzerrungsgeschwindigkeiten dieselbe sind, wie die zwischen den Verzerrungstensoren selbst. Zudem folgt aus den Beziehungen (2.64)₂, (2.14) und (2.18)

$$\overset{\diamond}{\epsilon} = \bar{\mathbf{R}}\dot{\bar{\mathbf{U}}}\bar{\mathbf{U}}^{-1}\bar{\mathbf{R}}^T = (\bar{\mathbf{R}}\dot{\bar{\mathbf{U}}})\bar{\mathbf{U}}^{-1}\bar{\mathbf{R}}^{-1} - \dot{\bar{\mathbf{R}}}\bar{\mathbf{R}}^T = \dot{\bar{\mathbf{F}}}\bar{\mathbf{F}}^{-1} - \dot{\bar{\mathbf{R}}}\bar{\mathbf{R}}^T \quad (2.65)$$

oder

$$\overset{\diamond}{\epsilon} = \mathbf{L} - \Omega \quad . \quad (2.66)$$

Bei der Gewinnung objektiver Zeitableitungen für die mikropolaren Krümmungstensoren sei daran erinnert, dass neben den Direktoren Φ_i auch die Basisvektoren \mathbf{G}_k zeitunabhängig sind, so dass infolge von Gleichung (2.11)

$$\dot{\mathbf{m}}_k = \Omega\mathbf{m}_k \quad (2.67)$$

gilt. Werden die Gleichungen (1.19) bis (1.37) verwendet, lässt sich zeigen, dass aus den Relationen (2.41) bis (2.53)

$$\dot{\Delta}_c = \dot{\mathcal{K}}[\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3] = \overset{\diamond}{\mathcal{K}}[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3] \quad (2.68)$$

oder

$$\dot{\Delta}_c = (\dot{\mathbf{K}} \times \Phi_2)[\Phi_1, \Phi_3] \quad (2.69)$$

$$= \Phi_1 \cdot ((\dot{\gamma}_k \otimes \mathbf{G}_k) \times \Phi_2) \Phi_3 \quad (2.70)$$

$$= \Phi_1 \cdot (\dot{\gamma}_k \times \Phi_2)(\mathbf{G}_k \cdot \Phi_3) \quad (2.71)$$

$$= \bar{\mathbf{R}}^T \varphi_1 \cdot (\bar{\mathbf{R}}^T \dot{\gamma}_k \times \bar{\mathbf{R}}^T \varphi_2)(\mathbf{m}_k \cdot \varphi_3) \quad (2.72)$$

$$= \varphi_1 \cdot (\dot{\gamma}_k \times \varphi_2)(\mathbf{m}_k \cdot \varphi_3) \quad (2.73)$$

$$= \varphi_1 \cdot ((\dot{\gamma}_k \otimes \mathbf{m}_k) \times \varphi_2) \varphi_3 \quad (2.74)$$

$$= \varphi_1 \cdot (\dot{\mathbf{K}} \times \varphi_2) \varphi_3 \quad (2.75)$$

$$= (\dot{\mathbf{K}} \times \varphi_2)[\varphi_1, \varphi_3] \quad (2.76)$$

folgt, wobei die objektiven Zeitableitungen $\dot{\mathcal{K}}$, $\dot{\mathcal{K}}$, $\dot{\mathbf{K}}$ und $\dot{\mathbf{K}}$ die folgenden Beziehungen erfüllen

$$\dot{\mathcal{K}} = \dot{\Gamma}_k \otimes \mathbf{G}_k \quad , \quad (2.77)$$

$$\dot{\mathcal{K}} := \dot{\mathcal{K}} - \Omega \mathcal{K} - \Omega \diamond \mathcal{K} - \mathcal{K} \Omega^T = \mathcal{L}(\bar{\mathbf{R}})[\dot{\mathcal{K}}] \quad , \quad (2.78)$$

$$\dot{\mathbf{K}} = \dot{\gamma}_k \otimes \mathbf{G}_k \quad , \quad (2.79)$$

$$\dot{\mathbf{K}} := \dot{\mathbf{K}} - \Omega \mathbf{K} - \mathbf{K} \Omega^T = \bar{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{R}}^T \quad . \quad (2.80)$$

Des Weiteren gilt

$$\dot{\Gamma}_k := \dot{\Gamma}_k - \Omega \Gamma_k - \Gamma_k \Omega^T = \bar{\mathbf{R}} \dot{\Gamma}_k \bar{\mathbf{R}}^T \quad , \quad (2.81)$$

$$\dot{\gamma}_k := \dot{\gamma}_k - \Omega \gamma_k = \bar{\mathbf{R}} \dot{\gamma}_k \quad , \quad (2.82)$$

$$\dot{\mathcal{K}} = \dot{\Gamma}_k \otimes \mathbf{m}_k \quad , \quad (2.83)$$

$$\dot{\mathbf{K}} = \dot{\gamma}_k \otimes \mathbf{m}_k \quad . \quad (2.84)$$

Es sollte erwähnt werden, dass die objektiven mikropolaren Krümmungsgeschwindigkeiten mit Hilfe des Ausdrucks $\partial \omega / \partial \vartheta^k$ ausgedrückt werden können. Zur Illustration wird die materielle Zeitableitung von (2.20) gebildet. Es ergibt sich

$$\dot{\Gamma}_k = \dot{\mathbf{R}}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial \vartheta^k} + \bar{\mathbf{R}}^T \frac{\partial \dot{\bar{\mathbf{R}}}}{\partial \vartheta^k} = \bar{\mathbf{R}}^T \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta^k} (\dot{\bar{\mathbf{R}}} \bar{\mathbf{R}}^T) \right\} \bar{\mathbf{R}} \quad (2.85)$$

oder

$$\dot{\Gamma}_k = \bar{\mathbf{R}}^T \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta^k} \Omega \right) \bar{\mathbf{R}} \quad . \quad (2.86)$$

Offensichtlich stellen $\dot{\Gamma}_k$ und $\partial \Omega / \partial \vartheta^k$ antisymmetrische Tensoren zweiter Stufe dar, deren axiale Vektoren jeweils $\dot{\gamma}_k$ und $\partial \omega / \partial \vartheta^k$ lauten. Für zwei beliebige Vektoren $\tilde{\mathbf{a}}$ und $\tilde{\mathbf{b}}$ in der Referenzkonfiguration, die gemäß $\mathbf{a} = \bar{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{a}}$ und $\mathbf{b} = \bar{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{b}}$ auf die aktuelle Konfiguration transformierbar

sind, gelten daher die folgenden Beziehungen

$$\tilde{\mathbf{b}} \cdot \dot{\tilde{\Gamma}}_k \tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{b}} \cdot (\dot{\tilde{\gamma}}_k \times \tilde{\mathbf{a}}) \quad (2.87)$$

$$= (\tilde{\mathbf{a}} \times \tilde{\mathbf{b}}) \cdot \dot{\tilde{\gamma}}_k \quad (2.88)$$

$$= (\bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{a} \times \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{b}) \cdot \bar{\mathbf{R}}^T \overset{\diamond}{\gamma}_k \quad (2.89)$$

$$= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \overset{\diamond}{\gamma}_k \quad (2.90)$$

Andererseits impliziert Gleichung (2.86) den Zusammenhang

$$\tilde{\mathbf{b}} \cdot \dot{\tilde{\Gamma}}_k \tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{b} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \vartheta^k} \mathbf{a} \quad (2.91)$$

$$= \mathbf{b} \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial \vartheta^k} \times \mathbf{a} \right) \quad (2.92)$$

$$= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \vartheta^k} \quad (2.93)$$

Da $\tilde{\mathbf{a}}$ und $\tilde{\mathbf{b}}$ und folglich auch \mathbf{a} und \mathbf{b} beliebig gewählt werden können, folgt aus dem Vergleich von (2.90) mit (2.93), dass

$$\overset{\diamond}{\gamma}_k = \frac{\partial \omega}{\partial \vartheta^k} \quad (2.94)$$

Somit ergibt sich aus Gleichung (2.84)

$$\overset{\diamond}{\mathbf{K}} = \frac{\partial \omega}{\partial \vartheta^k} \otimes \mathbf{m}_k \quad (2.95)$$

2.5 Zerlegung der Deformation

In der klassischen Plastizitätstheorie ist es üblich, eine multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten \mathbf{F} in elastische und plastische Anteile anzunehmen

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p \quad , \quad (2.96)$$

wobei \mathbf{F}_e die Bedingung $\det \mathbf{F}_e > 0$ erfüllt. Da $\det \mathbf{F} > 0$ sein muss, gilt auch $\det \mathbf{F}_p > 0$. (Auf die Gleichung (2.96) soll hier nicht genauer eingegangen werden. Näheres hierzu findet sich in LUBLINER [65], Kapitel 8.2 und MAUGIN [70], Kapitel 8, worin die Originalarbeiten von Lee zitiert werden.)

Es wird angenommen, dass die multiplikative Zerlegung (2.96) auch bei mikropolarer Plastizität gültig bleibt. Zusätzlich wird STEINMANN [81] folgend die multiplikative Zerlegung von $\bar{\mathbf{R}}$ in elastische und plastische Anteile angenommen

$$\bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{R}}_e \bar{\mathbf{R}}_p \quad , \quad (2.97)$$

wobei vorausgesetzt wird, dass sowohl der elastische Anteil $\bar{\mathbf{R}}_e$ als auch der plastische Anteil $\bar{\mathbf{R}}_p$ eigentlich orthogonale Tensoren zweiter Stufe sind. Des Weiteren gilt, dass \mathbf{F}_p und $\bar{\mathbf{R}}_p$ die Vektoren $d\mathbf{X}$ und Φ in der Referenzkonfiguration auf die Vektoren $d\hat{\mathbf{x}}$ und $\hat{\varphi}$ in einer sogenannten plastischen Zwischenkonfiguration $\hat{\mathcal{R}}_t$ gemäß

$$d\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_p d\mathbf{X} \quad , \quad (2.98)$$

$$\hat{\varphi} = \bar{\mathbf{R}}_p \Phi \quad (2.99)$$

abbilden (siehe Abbildung 2.2). Folglich ergibt sich aus den Gleichungen (2.22), (2.6) und (2.96) bis (2.99)

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}_e d\hat{\mathbf{x}} \quad , \quad (2.100)$$

$$\varphi = \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\varphi} \quad . \quad (2.101)$$

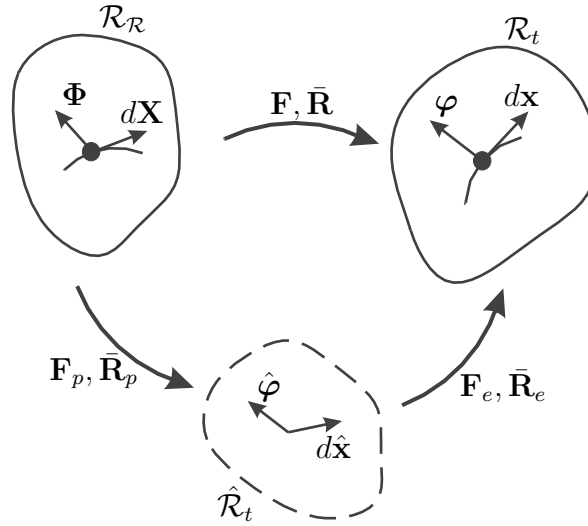


Abbildung 2.2: Die plastische Zwischenkonfiguration $\hat{\mathcal{R}}_t$.

Da $\det \mathbf{F}_e > 0$ und $\det \mathbf{F}_p > 0$ sind, gelten die folgenden polaren Zerlegungen

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{R}_e \mathbf{U}_e = \mathbf{V}_e \mathbf{R}_e \quad , \quad (2.102)$$

$$\mathbf{F}_p = \mathbf{R}_p \mathbf{U}_p = \mathbf{V}_p \mathbf{R}_p \quad , \quad (2.103)$$

wobei \mathbf{U}_e , \mathbf{V}_e , \mathbf{U}_p , \mathbf{V}_p symmetrische, positiv definite Tensoren zweiter Stufe und \mathbf{R}_e , \mathbf{R}_p eigentlich orthogonale Tensoren zweiter Stufe darstellen.

Analog zur Zerlegung in Gleichung (2.14) können die multiplikativen Zerlegungen

$$\mathbf{F}_e = \bar{\mathbf{R}}_e \bar{\mathbf{U}}_e = \bar{\mathbf{V}}_e \bar{\mathbf{R}}_e \quad , \quad (2.104)$$

$$\mathbf{F}_p = \bar{\mathbf{R}}_p \bar{\mathbf{U}}_p = \bar{\mathbf{V}}_p \bar{\mathbf{R}}_p \quad (2.105)$$

eingeführt werden, wobei die Tensoren $\bar{\mathbf{U}}_e$, $\bar{\mathbf{V}}_e$, $\bar{\mathbf{U}}_p$, $\bar{\mathbf{V}}_p$ jetzt im Allgemeinen nicht mehr symmetrisch sind (siehe STEINMANN [81]).

Es sollte hervorgehoben werden, dass ähnlich wie im nicht polaren Fall (siehe GREEN & NAGHDI [47]; CASEY & NAGHDI [19], [20]) die plastische Zwischenkonfiguration nur innerhalb beliebiger überlagerter Starrkörperrotationen $\mathbf{Q}_p = \mathbf{Q}_p(t)$ eindeutig bestimmt werden kann. Einige Transformationsbeziehungen, die sowohl für Starrkörperrotationen $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t)$, die auf der aktuellen Konfiguration überlagert sind, als auch für Starrkörperrotationen $\mathbf{Q}_p = \mathbf{Q}_p(t)$, die sich auf der plastischen Zwischenkonfiguration anwenden lassen, werden in Anhang A gegeben. Im hier betrachteten Fall der isotropen mikropolaren Plastizität ist es jedoch ausreichend, nur das Verhalten der mikropolaren Verzerrungs- und Krümmungstensoren mittels geeigneter konstitutiver Gleichungen zu ermitteln, um die wesentlichen Merkmale der plastischen Zwischenkonfiguration zu erfassen. Folglich ist es nicht notwendig, die Rotationstensoren \mathbf{R}_e , \mathbf{R}_p und $\bar{\mathbf{R}}_e$, $\bar{\mathbf{R}}_p$ zu bestimmen.

Die Beziehungen (2.99) bis (2.101) legen die additive Zerlegung der Differenzen Δ_s und Δ_c in der Form

$$\Delta_s = (\Delta_s)_e + (\Delta_s)_p \quad , \quad (2.106)$$

$$\Delta_c = (\Delta_c)_e + (\Delta_c)_p \quad (2.107)$$

nahe, wobei

$$(\Delta_s)_e := \boldsymbol{\varphi} \cdot d\mathbf{x} - \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot d\hat{\mathbf{x}} \quad , \quad (2.108)$$

$$(\Delta_s)_p := \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot d\hat{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\Phi} \cdot d\mathbf{X} \quad , \quad (2.109)$$

$$(\Delta_c)_e := \boldsymbol{\varphi}_1 \cdot (\nabla_{\mathcal{R}_t} \boldsymbol{\varphi}_2)[\boldsymbol{\varphi}_3] - \hat{\boldsymbol{\varphi}}_1 \cdot (\nabla_{\hat{\mathcal{R}}_t} \hat{\boldsymbol{\varphi}}_2)[\hat{\boldsymbol{\varphi}}_3] \quad , \quad (2.110)$$

$$(\Delta_c)_p := \hat{\boldsymbol{\varphi}}_1 \cdot (\nabla_{\hat{\mathcal{R}}_t} \hat{\boldsymbol{\varphi}}_2)[\hat{\boldsymbol{\varphi}}_3] - \boldsymbol{\Phi}_1 \cdot (\nabla_{\mathcal{R}_R} \boldsymbol{\Phi}_2)[\boldsymbol{\Phi}_3] \quad . \quad (2.111)$$

In (2.110) und (2.111) wurde vom Differentialoperator

$$\nabla_{\hat{\mathcal{R}}_t} \hat{\boldsymbol{\varphi}}_2 := \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}_2}{\partial \vartheta^k} \otimes \hat{\mathbf{m}}_k \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{m}}_k := \bar{\mathbf{R}}_p \mathbf{G}_k \quad (2.112)$$

Gebrauch gemacht.

Werden mathematische Umrechnungen wie in Kapitel 2.3 und 2.4 verwendet, kann leicht gezeigt werden, dass die Gleichungen (2.106) bis (2.111) additive Zerlegungen für die mikropolaren Verzerrungs- und Krümmungstensoren implizieren. So gelten hinsichtlich der Referenzkonfiguration z. B. die Beziehungen

$$(\Delta_s)_e := \boldsymbol{\Phi} \cdot \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e d\mathbf{X} \quad , \quad (2.113)$$

$$(\Delta_s)_p := \boldsymbol{\Phi} \cdot \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_p d\mathbf{X} \quad , \quad (2.114)$$

$$(\Delta_c)_e := \tilde{\mathcal{K}}_e[\boldsymbol{\Phi}_1, \boldsymbol{\Phi}_2, \boldsymbol{\Phi}_3] = (\tilde{\mathbf{K}}_e \times \boldsymbol{\Phi}_2)[\boldsymbol{\Phi}_1, \boldsymbol{\Phi}_3] \quad , \quad (2.115)$$

$$(\Delta_c)_p := \tilde{\mathcal{K}}_p[\boldsymbol{\Phi}_1, \boldsymbol{\Phi}_2, \boldsymbol{\Phi}_3] = (\tilde{\mathbf{K}}_p \times \boldsymbol{\Phi}_2)[\boldsymbol{\Phi}_1, \boldsymbol{\Phi}_3] \quad , \quad (2.116)$$

wobei $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e$, $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_p$ und $\tilde{\mathcal{K}}_e$, $\tilde{\mathcal{K}}_p$, $\tilde{\mathbf{K}}_e$, $\tilde{\mathbf{K}}_p$ in den Tabellen B.1 bis B.10 in Anhang B definiert sind.

Werden auch die skalaren Terme $(\Delta_s)_e$, $(\Delta_s)_p$, $(\Delta_c)_e$, $(\Delta_c)_p$, $(\Delta_s)_e$, $(\Delta_s)_p$, $(\Delta_c)_e$, $(\Delta_c)_p$ und so weiter als forminvariant bezüglich der betrachteten Konfiguration vorausgesetzt, dann können in

natürlicher Weise objektive Geschwindigkeiten definiert werden. Die Tabellen B.1 bis B.10 fassen diese Formeln zusammen und zeigen, wie die verschiedenen mikropolaren Verzerrungs- und Krümmungstensoren und ihre objektiven Geschwindigkeiten miteinander zusammenhängen. Einige dieser Ergebnisse wurden bereits durch STEINMANN [81] und VOLK [95] hergeleitet. Obwohl die Formulierung der konstitutiven Theorie in Kapitel 3 auf Tensoren zweiter Stufe basiert, werden aus Gründen der Vollständigkeit die mikropolaren Krümmungstensoren dritter Stufe in Tabelle B.7 und B.8 in Anhang B angegeben.

Aufgrund der Herleitung der verschiedenen mikropolaren Verzerrungs- und Krümmungstensoren wird ersichtlich, dass zum Beispiel die Tensoren $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}, \boldsymbol{\epsilon}$ oder $\tilde{\mathbf{K}}, \hat{\mathbf{K}}, \mathbf{K}$ jeweils Elemente einer Äquivalenzklasse sind. Das Gleiche gilt auch für die Tensoren $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e, \boldsymbol{\epsilon}_e$ oder $\tilde{\mathbf{K}}_e, \hat{\mathbf{K}}_e, \mathbf{K}_e$ und so weiter.

2.6 Mikropolare Spannungs- und Momentenspannungstensoren

Es ist bekannt, dass in einem mikropolaren Kontinuum neben dem Cauchyschen Spannungstensor \mathbf{T} ein sogenannter Momentenspannungstensor \mathbf{T}_c bezüglich der aktuellen Konfiguration wirkt (vgl. z. B. ERINGEN [36], Kapitel 2). Sowohl \mathbf{T} als auch \mathbf{T}_c sind Tensoren zweiter Stufe und kommen in den Bilanzgleichungen für Impuls und Drehimpuls vor. Diese lauten in der lokalen Form

$$\operatorname{div}\mathbf{T} + \mathbf{b} = \rho\ddot{\mathbf{x}} \quad , \quad (2.117)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{T}_c + \mathbf{t}_T + \mathbf{b}_c = \rho\dot{\boldsymbol{\sigma}}_c \quad , \quad (2.118)$$

mit

$$\mathbf{t}_T = 2\operatorname{axl}(\mathbf{T}_A) = \operatorname{axl}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^T) \quad . \quad (2.119)$$

In diesen Gleichungen stellt div den Divergenzoperator bezüglich \mathbf{x} dar, \mathbf{b} und \mathbf{b}_c sind jeweils die Volumenkraft- und Volumenmomentendichte in \mathcal{R}_t . $\boldsymbol{\sigma}_c$ ist der Eigendrehimpuls (Spin). Allerdings ist im Gegensatz zum nichtpolaren Fall der Spannungstensor \mathbf{T} jetzt nicht mehr symmetrisch. Ähnlich wie bei den mikropolaren Verzerrungs- und Krümmungstensoren können verschiedene mikropolare Spannungs- und Momentenspannungstensoren als auch objektive Geschwindigkeiten eingeführt werden. Diese müssen geeignet definierten skalaren Größen sowie deren materiellen Zeitableitungen genügen und forminvariant bezüglich der gewählten Konfiguration sein. Diese skalaren Größen können am besten durch die Betrachtung der lokalen Form der Energiebilanzgleichung (siehe ERINGEN [36], Kapitel 2.2) motiviert werden

$$\rho\dot{e} - \mathbf{T} \cdot (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega}) - \mathbf{T}_c \cdot \operatorname{grad}\boldsymbol{\omega} + \operatorname{div}\mathbf{q} - \rho r_{hs} = 0 \quad . \quad (2.120)$$

Die Größe ρ bezeichnet die Massendichte in der aktuellen Konfiguration, e die spezifische innere Energie, r_{hs} die spezifische innere Wärme pro Masse und \mathbf{q} den Wärmeflussvektor bezüglich der

aktuellen Konfiguration. Die Terme

$$W_s := \frac{\varrho_{\mathcal{R}}}{\varrho} \mathbf{T} \cdot (\mathbf{L} - \mathbf{\Omega}) = \mathbf{S} \cdot \overset{\diamond}{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (2.121)$$

und

$$W_c := \frac{\varrho_{\mathcal{R}}}{\varrho} \mathbf{T}_c \cdot \text{grad}\boldsymbol{\omega} \quad (2.122)$$

stellen jeweils die Leistung der inneren Kräfte und Momente pro Einheitsvolumen der Referenzkonfiguration dar. In den Gleichungen (2.121) und (2.122) stellt $\varrho_{\mathcal{R}}$ die Massendichte in der Referenzkonfiguration dar, $\mathbf{S} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{T} = (\varrho_{\mathcal{R}}/\varrho) \mathbf{T}$ ist der gewichtete Cauchysche Spannungstensor. Dabei wurde die Relation $\overset{\diamond}{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{L} - \mathbf{\Omega}$ verwendet, die in Tabelle B.2 in Anhang B gegeben ist. Um W_s und W_c bezüglich der Referenzkonfiguration umzuschreiben, wird

$$\tilde{\mathbf{T}} := \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{S} \mathbf{F}^{T-1} \quad (2.123)$$

definiert und daran erinnert (siehe Tabelle B.10 in Anhang B), dass

$$\text{grad}\boldsymbol{\omega} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \vartheta^k} \otimes \mathbf{g}^k = \bar{\mathbf{R}}(\dot{\boldsymbol{\gamma}}_k \otimes \mathbf{G}_k) \mathbf{F}^{-1} = \bar{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{K}} \mathbf{F}^{-1} \quad (2.124)$$

Der Momentenspannungstensor wird definiert als

$$\tilde{\mathbf{T}}_c := \frac{\varrho_{\mathcal{R}}}{\varrho} \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{T}_c \mathbf{F}^{T-1} \quad (2.125)$$

Werden die Beziehungen in Tabelle B.2 in Anhang B berücksichtigt, dann können W_s und W_c wie folgt umgeformt werden:

$$W_s = \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (2.126)$$

$$W_c = \tilde{\mathbf{T}}_c \cdot \dot{\mathbf{K}} \quad (2.127)$$

Zu jedem mikropolaren Verzerrungs- und Krümmungstensor kann jetzt jeweils durch die Betrachtung von W_s und W_c ein mikropolarer Spannungs- und Momentenspannungstensor zugeordnet werden, die als die duale mikropolare Spannung und die duale mikropolare Momentenspannung bezeichnet werden. Für die Tensoren $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}, \boldsymbol{\epsilon}$ und $\tilde{\mathbf{K}}, \hat{\mathbf{K}}, \mathbf{K}$ sind die dualen Entsprechungen in Tabelle B.11 bzw. B.12 in Anhang B aufgelistet. Bezüglich der Zwischenkonfiguration ist ersichtlich, dass z. B.

$$W_s = \hat{\mathbf{T}} \cdot \overset{\diamond}{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (2.128)$$

$$\hat{\mathbf{T}} := \bar{\mathbf{R}}_p \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{F}_p^T \quad (2.129)$$

und

$$W_c = \hat{\mathbf{T}}_c \cdot \overset{\diamond}{\mathbf{K}} \quad (2.130)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_c := \bar{\mathbf{R}}_p \tilde{\mathbf{T}}_c \bar{\mathbf{R}}_p^T \quad (2.131)$$

Obwohl in dieser Arbeit keine objektiven mikropolaren Spannungs- und Momentenspannungsgeschwindigkeiten Verwendung finden, werden objektive mikropolare Spannungs- und Momentenspannungsgeschwindigkeiten aus Gründen der Vollständigkeit kurz eingeführt. Diese können definiert werden, indem die Forminvarianz der Ausdrücke \dot{W}_s, \ddot{W}_s , usw. sowie \dot{W}_c, \ddot{W}_c , usw. verlangt wird. So gilt zum Beispiel

$$\dot{W}_s = \dot{\tilde{\mathbf{T}}} \cdot \dot{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}} + \tilde{\mathbf{T}} \cdot \ddot{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}} \quad , \quad (2.132)$$

$$\dot{W}_c = \dot{\tilde{\mathbf{T}}}_c \cdot \dot{\tilde{\mathbf{K}}} + \tilde{\mathbf{T}}_c \cdot \ddot{\tilde{\mathbf{K}}} \quad . \quad (2.133)$$

Es lässt sich zeigen, dass die Terme $\tilde{\mathbf{T}} \cdot \ddot{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}}$ und $\tilde{\mathbf{T}}_c \cdot \ddot{\tilde{\mathbf{K}}}$ für sich forminvariant sind. Die verlangte Forminvarianz von \dot{W}_s und \dot{W}_c ist folglich äquivalent zur Forminvarianz von $\dot{\tilde{\mathbf{T}}} \cdot \dot{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}}$ und $\dot{\tilde{\mathbf{T}}}_c \cdot \dot{\tilde{\mathbf{K}}}$. Diese Tatsache kann wiederum benutzt werden, um zugeordnete objektive Geschwindigkeiten für mikropolare Spannungen und Momentenspannungen einzuführen, die in den Tabellen B.11 und B.12 in Anhang B angegeben sind. Es kann leicht gezeigt werden, dass die mikropolaren Spannungstensoren $\tilde{\mathbf{T}}, \hat{\mathbf{T}}, \mathbf{S}$ und die mikropolaren Momentenspannungstensoren $\tilde{\mathbf{T}}_c, \hat{\mathbf{T}}_c, \mathbf{S}_c$ jeweils Elemente der entsprechenden Äquivalenzklasse sind.

2.7 Bemerkungen zum mikropolaren Krümmungsmaß

Zuerst wird der Term $(\varrho/\varrho_{\mathcal{R}})\mathbf{T}_c$ bezüglich W_c untersucht, der dual ist zum mikropolaren Krümmungstensor

$$\mathbf{h} := \gamma_k \otimes \mathbf{g}^k \quad . \quad (2.134)$$

Ähnlichen Schritten wie im vorangegangenen Abschnitt folgend, kann dann gezeigt werden, dass

$$\overset{\diamond}{\mathbf{h}} := \dot{\mathbf{h}} - \boldsymbol{\Omega}\mathbf{h} + \mathbf{h}\mathbf{L} = (\dot{\gamma}_k - \bar{\mathbf{R}}\gamma_k) \otimes \mathbf{g}^k = \text{grad}\boldsymbol{\omega} \quad , \quad (2.135)$$

so dass gilt

$$W_c = \frac{\varrho}{\varrho_{\mathcal{R}}}\mathbf{T}_c \cdot \overset{\diamond}{\mathbf{h}} \quad . \quad (2.136)$$

Dies wiederum weist darauf hin, dass $(\varrho/\varrho_{\mathcal{R}})\mathbf{T}_c$ dual zum Krümmungstensor \mathbf{h} bezüglich der objektiven Zeitableitung $\overset{\diamond}{\mathbf{h}}$ ist.

Andererseits kommt \mathbf{T}_c gemäß Gleichung (2.118) direkt in der Drehimpulsbilanzgleichung vor. Deshalb erscheint es nahe liegend zu sein, eine mikropolare Theorie auf der Basis von \mathbf{h} oder einem anderen mikropolaren Krümmungstensor im Sinne einer Äquivalenzklasse äquivalent zu \mathbf{h} zu formulieren. Zu diesem Zweck ist es vorteilhaft, eine geometrische Interpretation für \mathbf{h} zu geben.

Aus diesem Grund werden drei zeitunabhängige nicht linearabhängige Vektoren Φ_i am Punkt \mathbf{X} und die Vektoren $\varphi_1 = \bar{\mathbf{R}}\Phi_1$, $\varphi_2 = \bar{\mathbf{R}}\Phi_2$ und $\bar{\varphi}_3 = \mathbf{F}\Phi_3$ am Punkt \mathbf{x} betrachtet. Die skalarwertige Differenz $\bar{\Delta}_c$ wird demnach definiert durch

$$\bar{\Delta}_c := \varphi_1 \cdot \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \vartheta^k} \otimes \mathbf{g}^k \right) \bar{\varphi}_3 - \Phi_1 \cdot \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \vartheta^k} \otimes \mathbf{G}_k \right) \Phi_3 \quad (2.137)$$

$$\equiv \varphi_1 \cdot (\text{grad} \varphi_2)[\bar{\varphi}_3] - \Phi_1 \cdot (\text{GRAD} \Phi_2)[\Phi_3] \quad . \quad (2.138)$$

Dies kann mit Hilfe der Ausdrücke für \mathbf{h} oder $\tilde{\mathbf{K}}$ wie folgt ausgedrückt werden

$$\bar{\Delta}_c = (\tilde{\mathbf{K}} \times \Phi_2)[\Phi_1, \Phi_3] \quad (2.139)$$

$$= (\mathbf{h} \times \varphi_2)[\varphi_1, \bar{\varphi}_3] \quad (2.140)$$

mit

$$\mathbf{h} = \bar{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{F}^{-1} \quad (\text{und } \hat{\mathbf{h}} = \bar{\mathbf{R}}\dot{\tilde{\mathbf{K}}}\mathbf{F}^{-1}) \quad , \quad (2.141)$$

was eine geometrische Interpretation für \mathbf{h} liefert. Offensichtlich bilden alle Tensoren, die sich auf \mathbf{h} und $\bar{\Delta}_c$ beziehen, wie etwa die Tensoren $\tilde{\mathbf{K}}$, eine Äquivalenzklasse der mikropolaren Krümmungstensoren. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden jedoch solche Krümmungstensoren als ein nicht geeignetes mikropolares Krümmungsmaß für die Formulierung der mikropolaren Theorie angesehen, da der Vektor $\bar{\varphi}_3$, der in $\bar{\Delta}_c$ vorkommt, nicht durch eine reine Rotation mit $\bar{\mathbf{R}}$ aus Φ_3 erhalten werden kann, sondern durch eine Transformation mit dem Deformationsgradienten \mathbf{F} .

3 Mikropolares Plastizitätsmodell

Dieses Kapitel beschreibt die mikropolare (Visko-)Plastizitätstheorie, die in GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS [46] entwickelt wurde. Betrachtet werden hierbei Elastizitätsgesetze, nichtlineare isotrope Verfestigung, nichtlineare kinematische Verfestigung und eine Fließfunktion. Für die inneren tensor- und skalarwertigen Zustandsvariablen zur Beschreibung des Verfestigungsverhaltens werden Konstitutivgleichungen als hinreichende Bedingung zur Erfüllung des Zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik in Form der Clausius-Duhem-Ungleichung gewonnen. Die Formulierung des Materialmodells erfolgt in der plastischen Zwischenkonfiguration. Für die Auswertung der Beispiele erfolgt eine Transformation des konstitutiven Modells in die aktuelle Konfiguration unter Berücksichtigung kleiner elastischer Verzerrungen.

3.1 Thermodynamischer Rahmen der mikropolaren Plastizität

Für mikropolare Kontinua nimmt die verallgemeinerte Clausius-Duhem-Ungleichung bei isothermen Prozessen mit homogener Temperaturverteilung die folgende Form an (siehe ERINGEN [36], Kapitel 2.3):

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega}) + \frac{\varrho_{\mathcal{R}}}{\varrho} \mathbf{T}_c \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \vartheta^k} \otimes \mathbf{g}^k \right) - \varrho_{\mathcal{R}} \dot{\Psi} = \mathbf{S} \cdot \overset{\diamond}{\boldsymbol{\epsilon}} + \mathbf{S}_c \cdot \overset{\diamond}{\mathbf{K}} - \varrho_{\mathcal{R}} \dot{\Psi} \geq 0 \quad . \quad (3.1)$$

Gemäß der Absicht dieser Arbeit liegt es nahe, Gleichung (3.1) in der Form

$$\hat{\mathbf{T}} \cdot \overset{\diamond}{\boldsymbol{\epsilon}} + \hat{\mathbf{T}}_c \cdot \overset{\diamond}{\mathbf{K}} - \varrho_{\mathcal{R}} \dot{\Psi} \geq 0 \quad (3.2)$$

umzuschreiben, d. h. bezüglich der plastischen Zwischenkonfiguration. Im nicht polaren Fall ist es üblich, eine additive Zerlegung der spezifischen freien Energie Ψ in elastische und plastische Anteile vorzunehmen. Es wird angenommen, dass diese Zerlegung auch bei mikropolarer Plastizität gültig ist, so dass

$$\Psi(t) = \Psi_e(t) + \Psi_p(t) \quad . \quad (3.3)$$

Daraufhin kann die Ungleichung (3.2) umgeschrieben werden zu

$$\hat{\mathbf{T}} \cdot \overset{\diamond}{\boldsymbol{\epsilon}} + \hat{\mathbf{T}}_c \cdot \overset{\diamond}{\mathbf{K}} - \varrho_{\mathcal{R}} \dot{\Psi}_e - \varrho_{\mathcal{R}} \dot{\Psi}_p \geq 0 \quad . \quad (3.4)$$

3.2 Mikropolare Elastizitätsgesetze – Innere Dissipationsungleichung

In Analogie zum Fall reiner mikropolarer Elastizität (siehe Gleichung (2.8)) wird für den elastischen Anteil der freien Energie Ψ_e folgende Form angenommen

$$\Psi_e = \bar{\Psi}_e(\mathbf{F}_e, \bar{\mathbf{R}}_e, \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}_e}{\partial \vartheta^k} \otimes \hat{\mathbf{m}}_k) \quad , \quad (3.5)$$

die sich bei überlagerten Starrkörperrotationen auf der aktuellen Konfiguration (siehe Anhang A mit $\mathbf{Q}_p = \mathbf{1}$) wie folgt transformiert

$$\Psi_e^* = \bar{\Psi}_e(\mathbf{Q}\mathbf{F}_e, \mathbf{Q}\bar{\mathbf{R}}_e, \mathbf{Q}\frac{\partial \bar{\mathbf{R}}_e}{\partial \vartheta^k} \otimes \hat{\mathbf{m}}_k) \quad . \quad (3.6)$$

Für jeden eigentlich orthogonalen zeitabhängigen Tensor zweiter Stufe $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t)$ wird die Gültigkeit des Prinzips der materiellen Objektivität in Form der Beziehung $\Psi_e = \Psi_e^*$ verlangt. Insbesondere wird $\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{R}}_e^T$ gesetzt. Dies führt auf

$$\Psi_e = \bar{\Psi}_e(\bar{\mathbf{U}}_e, \mathbf{1}, \bar{\mathbf{R}}_e^T \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}_e}{\partial \vartheta^k} \otimes \hat{\mathbf{m}}_k) = \bar{\bar{\Psi}}_e(\bar{\mathbf{U}}_e, \hat{\mathcal{K}}_e) = \hat{\Psi}_e(\hat{\epsilon}_e, \hat{\mathbf{K}}_e) \quad , \quad (3.7)$$

wobei $\bar{\mathbf{U}}_e$ und $\hat{\mathcal{K}}_e$ jeweils als Funktionen von $\hat{\epsilon}_e$ und $\hat{\mathbf{K}}_e$ dargestellt werden.

Diese Darstellung für Ψ_e wird in Gleichung (3.4) verwendet, so dass sich nach einigen Umrechnungen folgende Beziehung ergibt

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{T}} \cdot \overset{\diamond}{\dot{\epsilon}} - \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\epsilon}_e} \cdot \overset{\diamond}{\dot{\epsilon}} + \hat{\mathbf{T}}_c \cdot \overset{\diamond}{\dot{\mathbf{K}}} - \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{K}}_e} \cdot \overset{\diamond}{\dot{\mathbf{K}}} - \varrho_{\mathcal{R}} \dot{\Psi}_p = \\ & \hat{\mathbf{T}} \cdot \overset{\diamond}{\dot{\epsilon}} - \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\epsilon}_e} \cdot (\overset{\diamond}{\dot{\epsilon}} + \hat{\Omega}_p \hat{\epsilon}_e - \hat{\epsilon}_e \hat{\mathbf{L}}_p) \\ & + \hat{\mathbf{T}}_c \cdot \overset{\diamond}{\dot{\mathbf{K}}} - \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{K}}_e} \cdot (\overset{\diamond}{\dot{\mathbf{K}}} + \hat{\Omega}_p \hat{\mathbf{K}}_e + \hat{\mathbf{K}}_e \hat{\Omega}_p^T) - \varrho_{\mathcal{R}} \dot{\Psi}_p = \\ & \left(\hat{\mathbf{T}} - \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\epsilon}_e} \right) \cdot \overset{\diamond}{\dot{\epsilon}} + \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\epsilon}_e} \cdot \overset{\diamond}{\dot{\epsilon}}_p - \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\epsilon}_e} \cdot (\hat{\Omega}_p \hat{\epsilon}_e - \hat{\epsilon}_e \hat{\mathbf{L}}_p) \\ & + \left(\hat{\mathbf{T}}_c - \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{K}}_e} \right) \cdot \overset{\diamond}{\dot{\mathbf{K}}} + \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{K}}_e} \cdot \overset{\diamond}{\dot{\mathbf{K}}}_p - \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{K}}_e} \cdot (\hat{\Omega}_p \hat{\mathbf{K}}_e - \hat{\mathbf{K}}_e \hat{\Omega}_p) - \varrho_{\mathcal{R}} \dot{\Psi}_p = \\ & \left(\hat{\mathbf{T}} - \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\epsilon}_e} \right) \cdot \overset{\diamond}{\dot{\epsilon}} + \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\epsilon}_e} \cdot \overset{\diamond}{\dot{\epsilon}}_p - \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\epsilon}_e} \cdot (\hat{\Omega}_p \hat{\epsilon}_e - \hat{\epsilon}_e \overset{\diamond}{\dot{\epsilon}}_p - \hat{\epsilon}_e \hat{\Omega}_p) \\ & + \left(\hat{\mathbf{T}}_c - \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{K}}_e} \right) \cdot \overset{\diamond}{\dot{\mathbf{K}}} + \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{K}}_e} \cdot \overset{\diamond}{\dot{\mathbf{K}}}_p - \varrho_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{K}}_e} \hat{\mathbf{K}}_e^T - \hat{\mathbf{K}}_e^T \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{K}}_e} \right) \cdot \hat{\Omega}_p - \varrho_{\mathcal{R}} \dot{\Psi}_p \geq 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

oder

$$\begin{aligned} & \left(\hat{\mathbf{T}} - \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e} \right) \cdot \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}} + \left(\hat{\mathbf{T}}_c - \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{K}}_e} \right) \cdot \overset{\diamond}{\hat{\mathbf{K}}} + \varrho_{\mathcal{R}} (\mathbf{1} + \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e^T) \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e} \cdot \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}_p + \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{K}}_e} \cdot \overset{\diamond}{\hat{\mathbf{K}}}_p \\ & - \varrho_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e^T - \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e^T \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e} + \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{K}}_e} \hat{\mathbf{K}}_e^T - \hat{\mathbf{K}}_e^T \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{K}}_e} \right) \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}}_p - \varrho_{\mathcal{R}} \dot{\Psi}_p \geq 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.9)$$

Des Weiteren wird angenommen, dass $\hat{\mathbf{T}}$ und $\hat{\mathbf{T}}_c$ Funktionen von $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e$ und $\hat{\mathbf{K}}_e$ sind, d. h.

$$\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{T}}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e, \hat{\mathbf{K}}_e) \quad , \quad (3.10)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_c = \hat{\mathbf{T}}_c(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e, \hat{\mathbf{K}}_e) \quad , \quad (3.11)$$

und dass $\hat{\Psi}_e$ eine isotrope Tensorfunktion von $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e$ und $\hat{\mathbf{K}}_e$ ist. Ψ_e kann demnach auch als eine Funktion der skalaren Invarianten der Tensoren $(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e)_S$, $(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e)_A$, $(\hat{\mathbf{K}}_e)_S$ und $(\hat{\mathbf{K}}_e)_A$ dargestellt werden. Es kann leicht gezeigt werden, dass folgende Relationen gelten

$$(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e)_S = \bar{\mathbf{R}}_p \{ (\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} - \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_p) \bar{\mathbf{U}}_p^{-1} \}_S \bar{\mathbf{R}}_p^T \quad , \quad (3.12)$$

$$(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e)_A = \bar{\mathbf{R}}_p \{ (\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} - \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_p) \bar{\mathbf{U}}_p^{-1} \}_A \bar{\mathbf{R}}_p^T \quad , \quad (3.13)$$

$$(\hat{\mathbf{K}}_e)_S = \bar{\mathbf{R}}_p (\tilde{\mathbf{K}}_e)_S \bar{\mathbf{R}}_p^T \quad , \quad (3.14)$$

$$(\hat{\mathbf{K}}_e)_A = \bar{\mathbf{R}}_p (\tilde{\mathbf{K}}_e)_A \bar{\mathbf{R}}_p^T \quad , \quad (3.15)$$

$$(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e)_S (\hat{\mathbf{K}}_e)_A = \bar{\mathbf{R}}_p \{ (\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} - \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_p) \bar{\mathbf{U}}_p^{-1} \}_S (\tilde{\mathbf{K}}_e)_A \bar{\mathbf{R}}_p^T \quad , \quad (3.16)$$

⋮

und dass die Invarianten von $(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e)_S$, $(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e)_A$, $(\hat{\mathbf{K}}_e)_S$ und $(\hat{\mathbf{K}}_e)_A$ mit Hilfe der Tensoren $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$, $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_p$, $\tilde{\mathbf{K}}$ und $\tilde{\mathbf{K}}_p$ ausgedrückt werden können. (Zu beachten ist, dass $\bar{\mathbf{U}}_p^{-1}$ als eine Funktion von $\bar{\mathbf{U}}_p$ und daher auch als eine Funktion von $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_p$ dargestellt werden kann.) Dies wiederum impliziert, dass Ψ_e ebenfalls als eine Funktion von $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$, $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_p$, $\tilde{\mathbf{K}}$ und $\tilde{\mathbf{K}}_p$ bezüglich der Bezugskonfiguration in der Form

$$\Psi_e = \hat{\Psi}_e(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e, \hat{\mathbf{K}}_e) = \tilde{\Psi}(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}, \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_p, \tilde{\mathbf{K}}, \tilde{\mathbf{K}}_p) \quad (3.17)$$

geschrieben werden kann. Nach einigen algebraischen Umformungen können hierfür folgende Beziehungen aufgestellt werden

$$\bar{\mathbf{R}}_p \frac{\partial \tilde{\Psi}_e}{\partial \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}} \mathbf{F}_p^T = \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e} \quad , \quad (3.18)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_p \frac{\partial \tilde{\Psi}_e}{\partial \tilde{\mathbf{K}}} \bar{\mathbf{R}}_p^T = \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{K}}_e} \quad , \quad (3.19)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_p \frac{\partial \tilde{\Psi}_e}{\partial \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_p} \mathbf{F}_p^T = -(\mathbf{1} + \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e^T) \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e} \quad , \quad (3.20)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_p \frac{\partial \tilde{\Psi}_e}{\partial \tilde{\mathbf{K}}_p} \bar{\mathbf{R}}_p^T = -\frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{K}}_e} \quad , \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e^T - \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e^T \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e} + \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{K}}_e} \hat{\mathbf{K}}_e^T - \hat{\mathbf{K}}_e^T \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{K}}_e} = \text{symmetrisch} \quad . \quad (3.22)$$

Nach der Substitution von (3.22) in (3.9) lautet die Entropieungleichung

$$\left(\hat{\mathbf{T}} - \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e} \right) \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}} + \left(\hat{\mathbf{T}}_c - \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{K}}_e} \right) \cdot \hat{\mathbf{K}} + \varrho_{\mathcal{R}} (\mathbf{1} + \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e^T) \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p + \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{K}}_e} \cdot \hat{\mathbf{K}}_p - \varrho_{\mathcal{R}} \dot{\Psi}_p \geq 0 \quad (3.23)$$

und muss für alle $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ und $\hat{\mathbf{K}}$ erfüllt werden. Es wird angenommen, dass Ψ_p von den inneren Zustandsvariablen abhängt, die die Verfestigungsantwort des mikropolaren Materials beschreiben. Ferner wird vorausgesetzt, dass im Falle ratenabhängiger Plastizität (Viskoplastizität) die Evolution der inneren Zustandsvariablen von den Zustandsvariablen selbst abhängen, jedoch nicht von deren Geschwindigkeiten. Es wird demnach angenommen, dass $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p$, $\hat{\mathbf{K}}_p$ und $\dot{\Psi}_p$ nur Funktionen der Zustandsvariablen sind. Mit ähnlichen Argumenten wie in COLEMAN & GURTIN [23], kann gefolgert werden, dass für mikropolare Viskoplastizität die folgenden Beziehungen

$$\hat{\mathbf{T}} = \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e} = \varrho_{\mathcal{R}} \bar{\mathbf{R}}_p \frac{\partial \tilde{\Psi}_e}{\partial \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}} \mathbf{F}_p^T, \quad (3.24)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_c = \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{K}}_e} = \varrho_{\mathcal{R}} \bar{\mathbf{R}}_p \frac{\partial \tilde{\Psi}_e}{\partial \tilde{\mathbf{K}}} \bar{\mathbf{R}}_p^T, \quad (3.25)$$

$$\mathcal{D}_{int} := (\mathbf{1} + \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e^T) \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p + \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{K}}_e} \cdot \hat{\mathbf{K}}_p - \varrho_{\mathcal{R}} \dot{\Psi}_p \geq 0 \quad (3.26)$$

notwendige und hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit der Ungleichung (3.23) in jedem zulässigen Prozess sind. Die erhaltene Ungleichung (3.26) wird als innere Dissipationsungleichung bezeichnet.

Bei ratenunabhängiger mikropolarer Plastizität, oft einfach als mikropolare Plastizität bezeichnet, wird die Evolution der inneren Zustandsvariablen in Abhängigkeit der Zustandsvariablen selbst und den Geschwindigkeiten der mikropolaren Verzerrungs- und Krümmungstensoren definiert. Die Beziehungen (3.24) bis (3.26) sind folglich notwendig und hinreichend, damit die Ungleichung (3.23) in jedem zulässigen rein elastischen Prozess, bei dem per Definition $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p$, $\hat{\mathbf{K}}_p$ und $\dot{\Psi}_p$ verschwinden, gültig ist. Es wird angenommen, dass die Gleichungen (3.24) bis (3.26) auch dann gültig sind, wenn entlang eines Belastungspfades vorgegangen wird, bei dem inelastisches Fließen stattfindet. Diese Beziehungen sind bei (ratenunabhängiger) mikropolarer Plastizität im Allgemeinen nur hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit der Ungleichung (3.23) in jedem zulässigen Prozess.

Außerdem ist es günstig, den mikropolaren Spannungstensor

$$\hat{\mathbf{P}} := (\mathbf{1} + \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e^T) \hat{\mathbf{T}} = (\mathbf{1} + \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e^T) \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e} \quad (3.27)$$

einzuführen, dessen Bedeutung ähnlich zu der des Mandelschen Spannungstensors in der klassischen Plastizität ist (vgl. TSAKMAKIS [88]).

Aus Gleichung (3.26) folgt im Falle der mikropolaren Plastizität und der mikropolaren Visko-
plastizität, dass

$$\mathcal{D}_{int} = \hat{\mathbf{P}} \cdot \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}_p + \hat{\mathbf{P}}_c \cdot \overset{\diamond}{\hat{\mathbf{K}}}_p - \varrho_{\mathcal{R}} \dot{\Psi}_p \geq 0 \quad (3.28)$$

mit

$$\hat{\mathbf{P}}_c \equiv \hat{\mathbf{T}}_c \quad . \quad (3.29)$$

3.3 Das Postulat von Il'iushin – Fließregel der mikropolaren Plastizität

Das Postulat von Il'iushin wurde bereits im Rahmen der klassischen Plastizität unter anderem von HILL [51], HILL & RICE [52], DAFALIAS [27], CASEY & TSENG [21], LUBLINER [65], [66], LIN & NAGHDI [61], LUCCHESI & SILHAVY [67], FOSDICK & VOLKMANN [42], SRINIVASA [80] sowie TSAKMAKIS [89], [90], [91] untersucht. In diesem Kapitel wird die ratenunabhängige mikropolare Plastizität behandelt. Um Evolutionsgleichungen für die mikropolaren plastischen Verzerrungs- und Krümmungstensoren herzuleiten, wird die Gültigkeit des Postulates von Il'iushin, das für mikropolare plastische Materialien verallgemeinert wurde, vorausgesetzt.

Es wird die Existenz einer Fließfunktion in einer Spannungs-Momentenspannungsraumformulierung bezüglich der plastischen Zwischenkonfiguration der Form

$$f(t) = \hat{f}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{P}}_c, \hat{\mathbf{h}}) \quad (3.30)$$

angenommen. Hierin bezeichnet $\hat{\mathbf{h}}$ eine Menge aus inneren Zustandsvariablen \hat{h}_i , $1 \leq i \leq M$, die skalarwertig sind oder die Komponenten eines Tensors darstellen und das Verfestigungsverhalten widerspiegeln. Es wird davon ausgegangen, dass Gleichung (3.30) in eine Verzerrungs-Krümmungsraumformulierung bezüglich der Referenzkonfiguration der Form

$$f(t) = \tilde{g}(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}, \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_p, \tilde{\mathbf{K}}, \tilde{\mathbf{K}}_p, \tilde{\mathbf{q}}) \quad (3.31)$$

umgeschrieben werden kann, wobei $\tilde{\mathbf{q}}$ eine Menge aus inneren Zustandsvariablen \tilde{q}_j , $1 \leq j \leq N$ ist. Diese sind mit den Verfestigungsvariablen \hat{h}_i verknüpft.

Die Gleichung

$$f(t) = \hat{f}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{P}}_c, \hat{\mathbf{h}}) = \tilde{g}(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}, \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_p, \tilde{\mathbf{K}}, \tilde{\mathbf{K}}_p, \tilde{\mathbf{q}}) = 0 \quad (3.32)$$

wird Fließbedingung genannt. Für feste Werte von $\hat{\mathbf{h}}$ beschreibt diese eine sogenannte Fließfläche im Raum der Spannungstensoren $\hat{\mathbf{P}}$ und der Momentenspannungstensoren $\hat{\mathbf{P}}_c$ und für feste Werte von $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_p$, $\tilde{\mathbf{K}}_p$, $\tilde{\mathbf{q}}$ eine Fließfläche im Raum der mikropolaren Verzerrungstensoren $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ und der mikropolaren Krümmungstensoren $\tilde{\mathbf{K}}$. Der Einfachheit halber wird angenommen, dass die betrachteten Fließflächen glatt sind.

Belastungsprozesse, bei denen es zu plastischem Fließen kommt, werden mit einem skalaren Parameter s anstelle der Zeit t beschrieben, welcher eine plastische Bogenlänge bezeichnet. Es wird vorausgesetzt, dass für $s = \textit{konstant}$ auch alle inneren Zustandsvariablen konstant bleiben. Ferner ist es sinnvoll, einen sogenannten Belastungsfaktor $L(t)$

$$L := [\dot{f}]_{s=\textit{konstant}} \quad (3.33)$$

einzuführen (siehe TSAKMAKIS [88]). Die Antwort des Modells wird dann wie folgt charakterisiert:

$$f < 0 \Leftrightarrow \text{elastischer Bereich} \quad (3.34)$$

$$f = 0 \quad \& \quad L \begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{elastische Entlastung} \\ \text{neutrale Belastung} \\ \text{plastische Belastung} \end{cases} . \quad (3.35)$$

Plastisches Fließen findet definitionsgemäß nur dann statt, wenn die Bedingungen für eine plastische Belastung zutreffen.

Im Folgenden wird die Aufmerksamkeit auf den Raum der Tensoren $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ und $\tilde{\mathbf{K}}$ in der Bezugskonfiguration gerichtet. Offenbar impliziert ein Zyklus im Raum von $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ und $\tilde{\mathbf{K}}$ einen Zyklus im Raum weiterer mikropolarer Verzerrungs- und Krümmungsmaße und umgekehrt. Einem Vorschlag von LUCCHESI & SILHAVY [67] folgend werden mikropolare Verzerrungs-Krümmungszyklen als klein (aber nicht notwendigerweise infinitesimal klein) bezeichnet, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Während des zyklischen Deformationsprozesses liegt der anfängliche mikropolare Verzerrungs-Krümmungszustand immer auf oder innerhalb der Fließflächen $\tilde{g} = 0$, die zu diesem Prozess gehören. Mit anderen Worten: Der anfängliche mikropolare Verzerrungs-Krümmungszustand liegt immer im Durchschnitt aller elastischer Bereiche, die von den Fließflächen $\tilde{g} = 0$ während des Prozesses umgeben werden. Dabei bezeichnet $C_s[t_0, t_e]$ einen kleinen mikropolaren Zyklus, der zur Zeit t_0 beginnt und zur Zeit t_e endet. Ein mikropolares Material erfüllt definitionsgemäß das Postulat von Il'iushin für kleine Zyklen, wenn für ein festgehaltenes materielles Teilchen die Spannungs-Momentenspannungsarbeit nie negativ ist

$$I(t_0, t_e) := \frac{1}{\varrho_{\mathcal{R}}} \int_{t_0}^{t_e} \mathbf{S} \cdot \dot{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}} dt + \frac{1}{\varrho_{\mathcal{R}}} \int_{t_0}^{t_e} \mathbf{T}_c \cdot \text{grad} \boldsymbol{\omega} dt \quad (3.36)$$

$$= \frac{1}{\varrho_{\mathcal{R}}} \int_{t_0}^{t_e} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}} dt + \frac{1}{\varrho_{\mathcal{R}}} \int_{t_0}^{t_e} \tilde{\mathbf{T}}_c \cdot \dot{\tilde{\mathbf{K}}} dt \geq 0 \quad \text{für alle } C_s[t_0, t_e] . \quad (3.37)$$

(Weiterführende Bemerkungen und Diskussionen zu Gleichung (3.37) im Rahmen der klassischen Plastizität lassen sich in TSAKMAKIS [89] finden.)

Im Folgenden wird von den Beziehungen

$$\tilde{\mathbf{T}} = \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \tilde{\Psi}_e}{\partial \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}} \quad (3.38)$$

und

$$\tilde{\mathbf{T}}_c = \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \tilde{\Psi}_e}{\partial \tilde{\mathbf{K}}} , \quad (3.39)$$

Gebrauch gemacht, die sich aus Gleichung (3.24), (3.25) und Tabelle B.11, B.12 in Anhang B ableiten lassen.

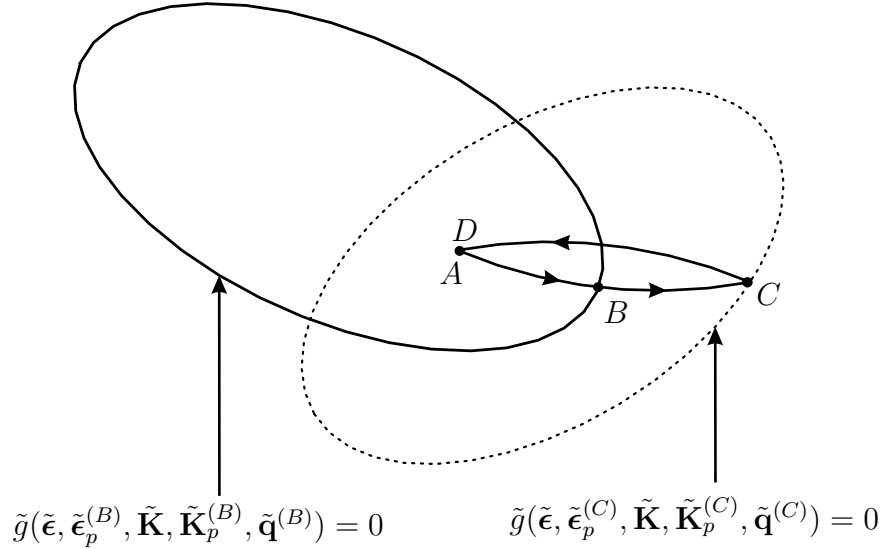


Abbildung 3.1: Ein kleiner Verzerrungs-Krümmungszyklus bei dem nur zwischen B und C plastisches Fließen auftritt.

Des Weiteren wird angenommen, dass Gleichung (3.37) gilt. Es wird ein kleiner Verzerrungs-Krümmungszyklus $ABCD$ (siehe Abbildung 3.1) betrachtet, der mit der Zeit t parametrisiert ist. Mit $X^{(P)}$ wird der Wert einer Größe X am Punkt P bezeichnet. Die mit den Punkten A, B, C, D verknüpften Zeiten lauten entsprechend $t^{(A)}, t^{(B)}, t^{(C)}, t^{(D)}$ ($t^{(A)} < t^{(B)} < t^{(C)} < t^{(D)}$). Der Verzerrungs-Krümmungszyklus beginnt und endet bei $\tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon}^{(A)} = \tilde{\epsilon}^{(D)}$, $\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}}^{(A)} = \tilde{\mathbf{K}}^{(D)}$, während plastisches Fließen nur zwischen B und C stattfindet. Da (3.24), (3.25) und folglich auch (3.38), (3.39) während der plastischen Belastung angenommen werden, ergibt sich

$$\begin{aligned} I(t^{(A)}, t^{(D)}) &= \frac{1}{\varrho \mathcal{R}} \int_{t^{(A)}}^{t^{(D)}} \{ \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\tilde{\epsilon}} + \tilde{\mathbf{T}}_c \cdot \dot{\tilde{\mathbf{K}}} \} dt \\ &= \int_{t^{(A)}}^{t^{(D)}} \left\{ \frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}(t), \tilde{\epsilon}_p(t), \tilde{\mathbf{K}}(t), \tilde{\mathbf{K}}_p(t))}{\partial \tilde{\epsilon}(t)} \cdot \dot{\tilde{\epsilon}}(t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}(t), \tilde{\epsilon}_p(t), \tilde{\mathbf{K}}(t), \tilde{\mathbf{K}}_p(t))}{\partial \tilde{\mathbf{K}}(t)} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{K}}}(t) \right\} dt \\ &= \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}^{(A)}, \tilde{\epsilon}_p^{(C)}, \tilde{\mathbf{K}}^{(A)}, \tilde{\mathbf{K}}_p^{(C)}) - \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}^{(A)}, \tilde{\epsilon}_p^{(B)}, \tilde{\mathbf{K}}^{(A)}, \tilde{\mathbf{K}}_p^{(B)}) \\ &\quad - \int_{t^{(B)}}^{t^{(C)}} \frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}(t), \tilde{\epsilon}_p(t), \tilde{\mathbf{K}}(t), \tilde{\mathbf{K}}_p(t))}{\partial \tilde{\epsilon}_p(t)} \cdot \dot{\tilde{\epsilon}}_p(t) dt \\ &\quad - \int_{t^{(B)}}^{t^{(C)}} \frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}(t), \tilde{\epsilon}_p(t), \tilde{\mathbf{K}}(t), \tilde{\mathbf{K}}_p(t))}{\partial \tilde{\mathbf{K}}_p(t)} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{K}}}_p(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{t^{(B)}}^{t^{(C)}} \left\{ \frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}^{(A)}, \tilde{\epsilon}_p(t), \tilde{\mathbf{K}}^{(A)}, \tilde{\mathbf{K}}_p(t))}{\partial \tilde{\epsilon}_p(t)} \cdot \dot{\tilde{\epsilon}}_p(t) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}^{(A)}, \tilde{\epsilon}_p(t), \tilde{\mathbf{K}}^{(A)}, \tilde{\mathbf{K}}_p(t))}{\partial \tilde{\mathbf{K}}_p(t)} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{K}}}_p(t) \right\} dt \\
 &\quad - \int_{t^{(B)}}^{t^{(C)}} \frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}(t), \tilde{\epsilon}_p(t), \tilde{\mathbf{K}}(t), \tilde{\mathbf{K}}_p(t))}{\partial \tilde{\epsilon}_p(t)} \cdot \dot{\tilde{\epsilon}}_p(t) dt \\
 &\quad - \int_{t^{(B)}}^{t^{(C)}} \frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}(t), \tilde{\epsilon}_p(t), \tilde{\mathbf{K}}(t), \tilde{\mathbf{K}}_p(t))}{\partial \tilde{\mathbf{K}}_p(t)} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{K}}}_p(t) dt \\
 &= \int_{t^{(B)}}^{t^{(C)}} \left[\left\{ \frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}^{(A)}, \tilde{\epsilon}_p(t), \tilde{\mathbf{K}}^{(A)}, \tilde{\mathbf{K}}_p(t))}{\partial \tilde{\epsilon}_p(t)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}(t), \tilde{\epsilon}_p(t), \tilde{\mathbf{K}}(t), \tilde{\mathbf{K}}_p(t))}{\partial \tilde{\epsilon}_p(t)} \right\} \cdot \dot{\tilde{\epsilon}}_p(t) \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ \frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}^{(A)}, \tilde{\epsilon}_p(t), \tilde{\mathbf{K}}^{(A)}, \tilde{\mathbf{K}}_p(t))}{\partial \tilde{\mathbf{K}}_p(t)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}(t), \tilde{\epsilon}_p(t), \tilde{\mathbf{K}}(t), \tilde{\mathbf{K}}_p(t))}{\partial \tilde{\mathbf{K}}_p(t)} \right\} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{K}}}_p(t) \right] dt \geq 0 \quad . \quad (3.40)
 \end{aligned}$$

Die Benutzung des Theorems von Taylor liefert

$$\begin{aligned}
 \lim_{t^{(C)} \rightarrow t^{(B)}} \frac{I(t^{(A)}, t^{(D)})}{t^{(C)} - t^{(B)}} &= \left\{ \frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}^{(A)}, \tilde{\epsilon}_p(t), \tilde{\mathbf{K}}^{(A)}, \tilde{\mathbf{K}}_p(t))}{\partial \tilde{\epsilon}_p(t)} \cdot \dot{\tilde{\epsilon}}_p(t) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}(t), \tilde{\epsilon}_p(t), \tilde{\mathbf{K}}(t), \tilde{\mathbf{K}}_p(t))}{\partial \tilde{\epsilon}_p(t)} \cdot \dot{\tilde{\epsilon}}_p(t) \right\}_{t=t^{(B)}} \\
 &\quad + \left\{ \frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}^{(A)}, \tilde{\epsilon}_p(t), \tilde{\mathbf{K}}^{(A)}, \tilde{\mathbf{K}}_p(t))}{\partial \tilde{\mathbf{K}}_p(t)} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{K}}}_p(t) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}(t), \tilde{\epsilon}_p(t), \tilde{\mathbf{K}}(t), \tilde{\mathbf{K}}_p(t))}{\partial \tilde{\mathbf{K}}_p(t)} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{K}}}_p(t) \right\}_{t=t^{(B)}} \geq 0 \quad . \quad (3.41)
 \end{aligned}$$

Da der Punkt B beliebig auf der Fließfläche gewählt werden kann, ist es in der letzten Gleichung nicht nötig, den Index $t^{(B)}$ mitzuführen, so dass sich als notwendige Bedingung für (3.37) die Ungleichung

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}, \tilde{\epsilon}_p, \tilde{\mathbf{K}}, \tilde{\mathbf{K}}_p)}{\partial \tilde{\epsilon}_p} \cdot \dot{\tilde{\epsilon}}_p - \frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}, \tilde{\epsilon}_p, \tilde{\mathbf{K}}, \tilde{\mathbf{K}}_p)}{\partial \tilde{\mathbf{K}}_p} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{K}}}_p \geq \\
 &\frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}^{(A)}, \tilde{\epsilon}_p, \tilde{\mathbf{K}}^{(A)}, \tilde{\mathbf{K}}_p)}{\partial \tilde{\epsilon}_p} \cdot \dot{\tilde{\epsilon}}_p - \frac{\partial \tilde{\Psi}_e(\tilde{\epsilon}^{(A)}, \tilde{\epsilon}_p, \tilde{\mathbf{K}}^{(A)}, \tilde{\mathbf{K}}_p)}{\partial \tilde{\mathbf{K}}_p} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{K}}}_p \quad (3.42)
 \end{aligned}$$

ergibt. Hierbei bezeichnen $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ und $\tilde{\mathbf{K}}$ einen mikropolaren Verzerrungs-Krümmungszustand auf der Fließfläche, während die Variablen $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_p$ und $\tilde{\mathbf{K}}_p$ mit diesem Zustand verbunden sind. Die Größen $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^{(A)}$ und $\tilde{\mathbf{K}}^{(A)}$ bezeichnen einen mikropolaren Verzerrungs-Krümmungszustand auf oder innerhalb der Fließfläche, d. h. $\tilde{g}(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^{(A)}, \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_p, \tilde{\mathbf{K}}^{(A)}, \tilde{\mathbf{K}}_p, \tilde{\mathbf{q}}) \leq 0$ mit den inneren Zustandsvariablen $\tilde{\mathbf{q}}$, die zum mikropolaren Verzerrungs-Krümmungszustand $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ und $\tilde{\mathbf{K}}$ gehören.

Umgekehrt ist die Ungleichung (3.42) eine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit von (3.37). Dies kann gezeigt werden, indem das Integral über (3.42) entlang eines Verzerrungs-Krümmungszyklus gebildet wird, wie Abbildung 3.1 zeigt. Damit (3.42) während dieses Zyklus gültig bleibt, müssen $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^{(A)}$ und $\tilde{\mathbf{K}}^{(A)}$ während des Zyklus immer in der Schnittmenge aller elastischer Bereiche liegen, was in der Tat impliziert, dass der Zyklus $ABCD$ klein ist. Danach werden dieselben Schritte lediglich in umgekehrter Reihenfolge wie in (3.40) durchgeführt, so dass es einfach ist (3.37) zu erhalten.

In Hinblick auf (3.20), (3.21) und den Beziehungen in den Tabellen B.2 und B.10 in Anhang B kann aus der Ungleichung (3.42) gefolgert werden, dass

$$\begin{aligned} & \bar{\mathbf{R}}_p^T (1 + \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e^T) \frac{\partial \hat{\Psi}_e(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e, \hat{\mathbf{K}}_e)}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e} \mathbf{F}_p^{T-1} \cdot \bar{\mathbf{R}}_p^T \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p \mathbf{F}_p + \bar{\mathbf{R}}_p^T \frac{\partial \hat{\Psi}_e(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e, \hat{\mathbf{K}}_e)}{\partial \hat{\mathbf{K}}_e} \bar{\mathbf{R}}_p \cdot \bar{\mathbf{R}}_p^T \hat{\mathbf{K}}_p \bar{\mathbf{R}}_p \geq \\ & \bar{\mathbf{R}}_p^T (1 + (\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e^{(A)})^T) \frac{\partial \hat{\Psi}_e(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e^{(A)}, \hat{\mathbf{K}}_e^{(A)})}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e} \mathbf{F}_p^{T-1} \cdot \bar{\mathbf{R}}_p^T \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p \mathbf{F}_p + \bar{\mathbf{R}}_p^T \frac{\partial \hat{\Psi}_e(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e^{(A)}, \hat{\mathbf{K}}_e^{(A)})}{\partial \hat{\mathbf{K}}_e} \bar{\mathbf{R}}_p \cdot \bar{\mathbf{R}}_p^T \hat{\mathbf{K}}_p \bar{\mathbf{R}}_p \end{aligned} \quad (3.43)$$

oder aufgrund von (3.24), (3.25), (3.28) und (3.29)

$$\hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p + \hat{\mathbf{P}}_c \cdot \hat{\mathbf{K}}_p \geq \hat{\mathbf{P}}^{(A)} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p + \hat{\mathbf{P}}_c^{(A)} \cdot \hat{\mathbf{K}}_p \quad . \quad (3.44)$$

Es soll darauf aufmerksam gemacht werden, dass die Ungleichung (3.44) sowohl zu (3.43) als auch zu (3.37) äquivalent ist.

In bestimmten Fällen ist es günstig, sich

$$\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_p := \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p \\ \hat{\mathbf{K}}_p \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

und

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} := \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{P}} \\ \hat{\mathbf{P}}_c \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

jeweils als verallgemeinerte mikropolare Verzerrungs-Krümmungs- und Spannungs-Momenten-spannungsvektoren zu denken mit der zugeordneten objektiven Geschwindigkeit

$$\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_p := \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p \\ \hat{\mathbf{K}}_p \end{pmatrix} \quad . \quad (3.47)$$

In diesem Fall gilt für die Ungleichung (3.44)

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\boldsymbol{\Lambda}}_p \geq \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(A)} \cdot \hat{\boldsymbol{\Lambda}}_p \quad . \quad (3.48)$$

Zu beachten ist, dass (3.48) und (3.44) jeweils äquivalent sind zu (3.43) und ebenso zu (3.37).

Wird mit

$$W_{pl} := \hat{\mathbf{P}} \cdot \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}_p + \hat{\mathbf{P}}_c \cdot \overset{\diamond}{\hat{\mathbf{K}}}_p \equiv \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\Lambda}}}_p \quad (3.49)$$

die plastische Spannungs-Momentenspannungsleistung bezeichnet, dann drückt Ungleichung (3.48) bzw. (3.44) ein Prinzip aus, das im Folgenden das Prinzip der maximalen mikropolaren plastischen Spannungs-Momentenspannungsleistung genannt wird, und das eine natürliche Erweiterung des entsprechenden Prinzips der maximalen plastischen Spannungsleistung der klassischen Plastizität ist. Aus (3.30) und (3.46) ergibt sich speziell für die Fließfunktion folgende Beziehung:

$$f(t) = \hat{f}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{P}}_c, \hat{\mathbf{h}}) =: \bar{f}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{\mathbf{h}}) \quad . \quad (3.50)$$

Folglich drückt die Ungleichung (3.48) oder (3.44) in Hinblick auf eine rein mechanische Formulierung der Theorie aus, dass für eine gegebene mikropolare plastische Geschwindigkeit $\overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\Lambda}}}_p$ unter allen zulässigen Spannungs-Momentenspannungszuständen $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(A)}$ der aktuelle Zustand $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ die mikropolare plastische Leistung W_{pl} maximiert. Ein Spannungs-Momentenspannungszustand $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ wird als zulässig bezeichnet, wenn $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ erreicht werden kann und auf oder im Inneren der Fließfläche liegt, d. h. $\bar{f}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{\mathbf{h}}) \leq 0$.

Andererseits ist für die hier betrachteten isothermen Deformationen mit homogener Temperaturverteilung die innere Dissipation (siehe Gleichung (3.28)) gegeben durch

$$\mathcal{D}_{int}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\Lambda}}}_p, \dot{\Psi}_p) = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\Lambda}}}_p - \varrho_{\mathcal{R}} \dot{\Psi}_p \quad . \quad (3.51)$$

Gleichung (3.48) besagt somit, dass für gegebene innere Zustandsvariablen und deren Geschwindigkeiten, d. h. für gegebenes $\overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\Lambda}}}_p$ und $\dot{\Psi}_p$, unter allen zulässigen Spannungs-Momentenspannungspaaren $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(A)}$ das aktuelle Paar $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ die innere Dissipationsleistung \mathcal{D}_{int} maximiert. Es kann gezeigt werden, dass die Konvexität der Fließfläche $\bar{f} = 0$ und die Normalenregel für $\overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\Lambda}}}_p$ hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit der Ungleichung (3.48) sind. Dies bedeutet, dass (3.48) immer erfüllt ist, wenn $\overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\Lambda}}}_p$ entlang der äußeren Normalen an der Fließfläche $\bar{f} = 0$, die als glatt angenommen wurde, gerichtet ist,

$$\overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\Lambda}}}_p = \dot{s} \frac{\frac{\partial \bar{f}}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}}}{\left\| \frac{\partial \bar{f}}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}} \right\|} \quad (3.52)$$

oder äquivalent dazu

$$\overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}_p = \dot{s} \frac{\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}}}{\left\| \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}} \right\|} , \quad (3.53)$$

$$\overset{\diamond}{\hat{\mathbf{K}}}_p = \dot{s} \frac{\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}_c}}{\left\| \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}} \right\|} , \quad (3.54)$$

mit

$$\left\| \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}} \right\| := \sqrt{\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}} \cdot \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}} + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}_c} \cdot \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}_c}} . \quad (3.55)$$

Hierbei ist \dot{s} eine positive skalare Größe für die plastische Belastung, die aus der sogenannten Konsistenzbedingung $\dot{f} = 0$ bestimmt werden muss. Aus Gleichung (3.52) bis (3.55) ist ersichtlich, dass

$$\dot{s} = \sqrt{\overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\Lambda}}}_p \cdot \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\Lambda}}}_p} := \sqrt{\overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}_p \cdot \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}_p + \overset{\diamond}{\hat{\mathbf{K}}}_p \cdot \overset{\diamond}{\hat{\mathbf{K}}}_p} . \quad (3.56)$$

Offensichtlich ist die Konvexität von $\bar{f}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{\mathbf{h}}) = 0$ bezüglich $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ äquivalent zur Konvexität von $\hat{f}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{P}}_c, \hat{\mathbf{h}}) = 0$ bezüglich $\hat{\mathbf{P}}$ und $\hat{\mathbf{P}}_c$.

Wie im klassischen Fall ist die plastische Inkompressibilität definiert durch die Bedingung

$$\det \mathbf{F}_p = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{tr} \overset{\diamond}{\hat{\mathbf{L}}}_p = \text{tr} \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}_p = 0 . \quad (3.57)$$

Diese Annahme führt zu der Schlussfolgerung, dass die Fließfunktion eine solche Gestalt besitzt, dass $\partial \hat{f} / \partial \hat{\mathbf{P}}$ (siehe Gleichung (3.53)) deviatorisch ist.

3.4 Fließregel bei mikropolarer Viskoplastizität

Als nächstes werden mikropolare Viskoplastizitätsmodelle betrachtet, die aus mikropolaren Plastizitätsmodellen hervorgehen, indem alle konstitutiven Gleichungen außer der Evolutionsgleichung für s übernommen werden. Diese wird auf ähnliche Weise wie in der klassischen Viskoplastizität mit Hilfe einer sogenannten Überspannung-Momentenspannung definiert. Während bei ratenunabhängiger mikropolarer Plastizität die Fließfunktion stets die Bedingung $f = \hat{f}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{P}}_c, \hat{\mathbf{h}}) \leq 0$ erfüllt, wird diese Einschränkung für f somit im Fall mikropolarer Viskoplastizität nicht auferlegt. Ein positiver Wert von f wird als Überspannungs-Momentenspannung

bezeichnet, so dass \dot{s} als eine gegebene Funktion der Form $\langle f \rangle$ angenommen werden kann. Ein Beispiel ist die folgende Evolutionsgleichung

$$\dot{s} = \frac{\langle f \rangle^m}{\eta} \geq 0 \quad , \quad (3.58)$$

wobei m und η positive Materialparameter darstellen.

3.5 Mikropolare Verfestigungsregeln

In der mikropolaren Theorie werden isotrope und kinematische Verfestigung jeweils mittels einer skalaren Variablen r und eines verallgemeinerten mikropolaren Verzerrungs-Krümmungsvektors

$$\hat{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{Y}} \\ \hat{\mathbf{Y}}_c \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

beschrieben. Die Tensoren zweiter Stufe $\hat{\mathbf{Y}}$ und $\hat{\mathbf{Y}}_c$ werden derart definiert, dass sie jeweils die mathematische und geometrische Struktur mikropolarer Verzerrungs- und Krümmungstensoren bezüglich der plastischen Zwischenkonfiguration $\hat{\mathcal{R}}_t$ besitzen. Die zugeordneten objektiven Geschwindigkeiten sind somit definiert durch

$$\overset{\diamond}{\hat{\mathbf{y}}} = \begin{pmatrix} \overset{\diamond}{\hat{\mathbf{Y}}} \\ \overset{\diamond}{\hat{\mathbf{Y}}_c} \end{pmatrix} \quad , \quad (3.60)$$

$$\overset{\diamond}{\hat{\mathbf{Y}}} = \dot{\hat{\mathbf{Y}}} - \hat{\Omega}_p \hat{\mathbf{Y}} + \hat{\mathbf{Y}} \hat{\mathbf{L}}_p \quad , \quad (3.61)$$

$$\overset{\diamond}{\hat{\mathbf{Y}}_c} = \dot{\hat{\mathbf{Y}}_c} - \hat{\Omega}_p \hat{\mathbf{Y}}_c - \hat{\mathbf{Y}}_c \hat{\Omega}_p^T \quad . \quad (3.62)$$

Im Weiteren werden $\hat{\mathbf{Y}}$ und $\hat{\mathbf{Y}}_c$ jeweils als Anteile von $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p$ und $\hat{\mathbf{K}}_p$ betrachtet, die einen Beitrag zu der im Material gespeicherten Arbeit leisten. Die verbleibenden Anteile $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ und $\hat{\boldsymbol{\beta}}_c$

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \hat{\mathbf{Y}} + \hat{\boldsymbol{\beta}} \quad , \quad (3.63)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_p = \hat{\mathbf{Y}}_c + \hat{\boldsymbol{\beta}}_c \quad , \quad (3.64)$$

tragen zu der Arbeit bei, die während des inelastischen Belastungsprozesses dissipiert wird. Aus Gleichung (3.63) und (3.64) folgt

$$\overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p} = \overset{\diamond}{\hat{\mathbf{Y}}} + \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\beta}}} \quad , \quad (3.65)$$

$$\overset{\diamond}{\hat{\mathbf{K}}_p} = \overset{\diamond}{\hat{\mathbf{Y}}_c} + \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\beta}}_c} \quad , \quad (3.66)$$

wobei die zugeordneten objektiven Zeitableitungen von $\hat{\mathbf{Y}}$, $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ und $\hat{\mathbf{Y}}_c$, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_c$ wie in Tabelle B.2 und B.10 in Anhang B definiert sind. Wird plastische Inkompressibilität angenommen, legt Gleichung (3.65) die Annahmen nahe, dass

$$\text{tr} \overset{\diamond}{\hat{\mathbf{Y}}} = -\text{tr} \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\beta}}} \quad , \quad \text{wenn} \quad \text{tr} \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}} = 0 \quad . \quad (3.67)$$

In Anlehnung an klassische Vorschläge (vgl. DIEGELE ET AL. [30]) wird die additive Zerlegung des plastischen Anteils der spezifischen freien Energiefunktion angenommen

$$\Psi_p(t) = \Psi_p^{(is)}(t) + \Psi_p^{(kin)}(t) \quad (3.68)$$

mit

$$\Psi_p^{(is)} = \bar{\Psi}_p^{(is)}(r) \quad , \quad (3.69)$$

$$\Psi_p^{(kin)} = \bar{\Psi}_p^{(kin)}(\hat{\mathbf{Y}}) = \hat{\Psi}_p^{(kin)}(\hat{\mathbf{Y}}, \hat{\mathbf{Y}}_c) \quad . \quad (3.70)$$

Die folgenden Definitionen führen thermodynamisch konjugierte Kräfte ein:

$$R := \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \bar{\Psi}_p^{(is)}(r)}{\partial r} \quad , \quad (3.71)$$

$$\hat{\mathbf{Z}} := \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_p^{(kin)}(\hat{\mathbf{Y}}, \hat{\mathbf{Y}}_c)}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} \quad , \quad (3.72)$$

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_c := \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_p^{(kin)}(\hat{\mathbf{Y}}, \hat{\mathbf{Y}}_c)}{\partial \hat{\mathbf{Y}}_c} \quad . \quad (3.73)$$

Die isotrope Verfestigung wird durch eine skalarwertige Spannung k beschrieben, die aus den zwei Anteilen R und h besteht und von denen nur R zur Speicherung von Energie im Material beiträgt:

$$k = h + R \quad , \quad h = \textit{konstant} \geq 0 \quad . \quad (3.74)$$

Die kinematische Verfestigung wird modelliert durch den Translationstensor (sog. back-stress-couple-stress Tensor)

$$\hat{\boldsymbol{\chi}} := \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\xi}} \\ \hat{\boldsymbol{\xi}}_c \end{pmatrix} \quad , \quad (3.75)$$

wobei $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ ein Spannungstensor mit der mathematischen und geometrischen Struktur ähnlich der von $\hat{\mathbf{P}}$ in Gleichung (3.27) ist. Dieser ist definiert durch

$$\hat{\boldsymbol{\xi}} := (\mathbf{1} - \hat{\mathbf{Y}}^T) \hat{\mathbf{Z}} \quad . \quad (3.76)$$

(Eine Motivation der letzten Definition ist in Anhang C gegeben.)

Die innere Dissipationsungleichung reduziert sich mit Hilfe dieser Beziehungen zu

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{int} &= \hat{\mathbf{P}} \cdot \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}_p + \hat{\mathbf{P}}_c \cdot \overset{\diamond}{\hat{\mathbf{K}}}_p - R\dot{r} - \hat{\mathbf{Z}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{Y}}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}_c \cdot \dot{\hat{\mathbf{Y}}}_c \\ &= (\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}) \cdot \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}_p + (\hat{\mathbf{P}}_c - \hat{\boldsymbol{\xi}}_c) \cdot \overset{\diamond}{\hat{\mathbf{K}}}_p - R\dot{r} + \hat{\boldsymbol{\xi}} \cdot \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}_p + \hat{\boldsymbol{\xi}}_c \cdot \overset{\diamond}{\hat{\mathbf{K}}}_p - \hat{\mathbf{Z}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{Y}}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}_c \cdot \dot{\hat{\mathbf{Y}}}_c \geq 0 \end{aligned} \quad (3.77)$$

oder

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{int} &= (\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}) \cdot \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}_p + (\hat{\mathbf{P}}_c - \hat{\boldsymbol{\xi}}_c) \cdot \overset{\diamond}{\hat{\mathbf{K}}}_p - R\dot{r} \\ &\quad + \hat{\mathbf{Z}} \cdot (\overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}_p - \dot{\hat{\mathbf{Y}}}) + \hat{\boldsymbol{\xi}}_c \cdot (\overset{\diamond}{\hat{\mathbf{K}}}_p - \dot{\hat{\mathbf{Y}}}_c) \\ &\quad + (\hat{\mathbf{Z}}\hat{\mathbf{Y}}^T - \hat{\mathbf{Y}}^T\hat{\mathbf{Z}} + \hat{\boldsymbol{\xi}}_c\hat{\mathbf{Y}}_c^T - \hat{\mathbf{Y}}_c^T\hat{\boldsymbol{\xi}}_c) \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}}_p^T \geq 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.78)$$

Es wird angenommen, dass $\hat{\Psi}_p^{(kin)}$ eine isotrope Tensorfunktion von $\hat{\mathbf{Y}}$ und $\hat{\mathbf{Y}}_c$ ist. Analog zum Vorgehen bei Gleichung (3.22) folgt dann

$$\hat{\mathbf{Z}}\hat{\mathbf{Y}}^T - \hat{\mathbf{Y}}^T\hat{\mathbf{Z}} + \hat{\boldsymbol{\xi}}_c\hat{\mathbf{Y}}_c^T - \hat{\mathbf{Y}}_c^T\hat{\boldsymbol{\xi}}_c = \text{symmetrisch} \quad , \quad (3.79)$$

so dass

$$\mathcal{D}_{int} = (\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}) \cdot \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}_p + (\hat{\mathbf{P}}_c - \hat{\boldsymbol{\xi}}_c) \cdot \overset{\diamond}{\hat{\mathbf{K}}}_p - R\dot{r} + \hat{\mathbf{Z}} \cdot \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\beta}}} + \hat{\boldsymbol{\xi}}_c \cdot \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_c \geq 0 \quad (3.80)$$

oder

$$\mathcal{D}_{int} = (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}) \cdot \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\Lambda}}}_p - R\dot{r} + \hat{\mathbf{Z}} \cdot \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\beta}}} + \hat{\boldsymbol{\xi}}_c \cdot \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_c \geq 0 \quad . \quad (3.81)$$

Effekte aufgrund isotroper Verfestigung können von Effekten aufgrund kinematischer Verfestigung getrennt werden, indem verlangt wird, dass die beiden Ungleichungen

$$\mathcal{D}_{int}^{(is)} := (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}) \cdot \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\Lambda}}}_p - R\dot{r} \geq 0 \quad , \quad (3.82)$$

$$\mathcal{D}_{int}^{(kin)} := \hat{\mathbf{Z}} \cdot \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\beta}}} + \hat{\boldsymbol{\xi}}_c \cdot \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_c \equiv \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{Z}} \\ \hat{\boldsymbol{\xi}}_c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\beta}}} \\ \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_c \end{pmatrix} \geq 0 \quad (3.83)$$

erfüllt werden, die hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit von (3.81) darstellen.

Im nächsten Kapitel werden die Evolutionsgleichungen für die Verfestigungsantwort als hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit von (3.82) und (3.83) hergeleitet.

3.5.1 Isotrope Verfestigung

Es wird angenommen, dass die Fließfunktion (3.50) die Form

$$f(t) = \bar{f}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}) - k \quad (3.84)$$

besitzt mit \bar{f} als einer homogenen Funktion ersten Grades, so dass

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}})} \cdot (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}) = \bar{f} \quad . \quad (3.85)$$

Dies folgt aus dem Theorem von Euler für homogene Funktionen. Aus der Normalenregel (3.52) ist bekannt, dass (3.82) äquivalent ist zu

$$(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}) \cdot \dot{s} \frac{\frac{\partial \bar{f}}{\partial(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}})}}{\left\| \frac{\partial \bar{f}}{\partial(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}})} \right\|} - R\dot{r} \geq 0 \quad (3.86)$$

oder aufgrund von (3.85) zu

$$\dot{s} \frac{\bar{f}}{\varphi} - R\dot{r} \geq 0 \quad , \quad \varphi := \left\| \frac{\partial \bar{f}}{\partial (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\chi}})} \right\| \quad . \quad (3.87)$$

Wenn inelastische Belastung vorliegt, gilt $f = 0 \Leftrightarrow \bar{f} = k$ bei mikropolarer Plastizität und $f \geq 0 \Leftrightarrow \bar{f} \geq k$ bei mikropolarer Viskoplastizität. Auf diese Weise folgt aus (3.87), dass

$$\dot{s} \frac{k}{\varphi} - R\dot{r} \geq 0 \quad , \quad (3.88)$$

oder aufgrund von (3.74)

$$R \left(\frac{\dot{s}}{\varphi} - \dot{r} \right) + h \frac{\dot{s}}{\varphi} \geq 0 \quad . \quad (3.89)$$

Da $h\dot{s}/\varphi \geq 0$, ist es ausreichend zu verlangen, dass

$$R \left(\frac{\dot{s}}{\varphi} - \dot{r} \right) \geq 0 \quad (3.90)$$

um (3.82) immer zu erfüllen. Dies wiederum wird dann und nur dann erfüllt, wenn

$$\frac{\dot{s}}{\varphi} - \dot{r} \geq 0 \quad . \quad (3.91)$$

Eine hinreichende Bedingung für diese Ungleichung ist

$$\dot{r} = (1 - \beta^{(is)} r) \frac{\dot{s}}{\varphi} \quad , \quad r|_{s=0} = 0 \quad , \quad (3.92)$$

wobei $\beta^{(is)}$ eine skalare Größe ist mit $\beta^{(is)} \geq 0$.

Ein spezielles Beispiel stellen die folgenden Beziehungen dar:

$$\Psi_p^{(is)} = \bar{\Psi}_p^{(is)}(r) = \frac{1}{\varrho \mathcal{R}} \left(\frac{1}{2} \gamma^{(is)} r^2 + R_0 r \right) \quad , \quad R_0 = R|_{s=0} \quad , \quad \gamma^{(is)} \geq 0 \quad , \quad (3.93)$$

$$R = \varrho \mathcal{R} \frac{\partial \bar{\Psi}_p^{(is)}}{\partial r} = \gamma^{(is)} r + R_0 \quad . \quad (3.94)$$

Daraus folgt

$$k = R + h \quad \Rightarrow \quad k_0 := k|_{s=0} = R_0 + h \quad . \quad (3.95)$$

Gleichung (3.92) ist äquivalent zu

$$\dot{R} = [\gamma^{(is)} - \beta^{(is)}(R - R_0)] \frac{\dot{s}}{\varphi} \quad , \quad (3.96)$$

was wiederum äquivalent ist zu

$$\dot{k} = [\gamma^{(is)} - \beta^{(is)}(k - k_0)] \frac{\dot{s}}{\varphi} \quad . \quad (3.97)$$

Dies stellt eine Verallgemeinerung zu den von Chaboche vorgeschlagenen Modellen dar.

3.5.2 Kinematische Verfestigung

Um die Ungleichung (3.83) zu erfüllen, genügt es anzunehmen, dass

$$\overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\beta}}} = \hat{\mathcal{M}}[\hat{\mathbf{Z}}] \quad , \quad (3.98)$$

$$\overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_c = \hat{\mathcal{M}}_c[\hat{\boldsymbol{\xi}}_c] \quad , \quad (3.99)$$

wobei $\hat{\mathcal{M}}$ und $\hat{\mathcal{M}}_c$ isotrope Tensoren vierter Stufe darstellen (siehe Gleichung (1.18)). Werden (3.65) und (3.66) verwendet, ergibt sich

$$\overset{\diamond}{\hat{\mathbf{Y}}} = \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}_p - \hat{\mathcal{M}}[\hat{\mathbf{Z}}] \quad , \quad (3.100)$$

$$\overset{\diamond}{\hat{\mathbf{Y}}}_c = \overset{\diamond}{\hat{\mathbf{K}}}_p - \hat{\mathcal{M}}_c[\hat{\boldsymbol{\xi}}_c] \quad . \quad (3.101)$$

Dies stellt die Evolutionsgleichung dar, die die Antwort des mikropolaren Materials bei kinematischer Verfestigung beschreiben.

Ein spezieller Fall entsteht, wenn $\hat{\mathcal{M}}$ und $\hat{\mathcal{M}}_c$ wie folgt gewählt werden:

$$\hat{\mathcal{M}} = \dot{s}((b_1 + b_2)\boldsymbol{\mathcal{E}} + (b_1 - b_2)\boldsymbol{\mathcal{I}}) \quad , \quad (3.102)$$

$$\hat{\mathcal{M}}_c = \dot{s}((b_{c1} + b_{c2})\boldsymbol{\mathcal{E}} + (b_{c1} - b_{c2})\boldsymbol{\mathcal{I}}) \quad . \quad (3.103)$$

Dabei stellen b_1, b_2, b_{c1}, b_{c2} nicht negative reelle Zahlen dar. Es gilt

$$\overset{\diamond}{\hat{\mathbf{Y}}} = \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}_p - \dot{s}((b_1 + b_2)\hat{\mathbf{Z}} + (b_1 - b_2)\hat{\mathbf{Z}}^T) \quad , \quad (3.104)$$

$$\overset{\diamond}{\hat{\mathbf{Y}}}_c = \overset{\diamond}{\hat{\mathbf{K}}}_p - \dot{s}((b_{c1} + b_{c2})\hat{\boldsymbol{\xi}}_c + (b_{c1} - b_{c2})\hat{\boldsymbol{\xi}}_c^T) \quad . \quad (3.105)$$

Dieser Ansatz besitzt die Armstrong-Frederick-Form.

3.5.3 Transformation des mikropolaren konstitutiven Modells nach \mathcal{R}_t – Kleine elastische Verzerrungen

Da in den späteren Kapiteln die Feldgleichungen in der Momentankonfiguration \mathcal{R}_t ausgewertet werden, müssen alle konstitutiven Beziehungen von der Zwischen- auf die aktuelle Konfiguration umgeschrieben werden. Die Transformation ist jedoch rein formaler Natur und hat keine physikalische Bedeutung, da das konstitutive Modell – also die Physik – bereits bzgl. $\hat{\mathcal{R}}_t$ formuliert ist. Ferner wird aus anwendungsbezogenen Gründen der Fall kleiner elastischer Verzerrungen sowohl für das Mikro- als auch für das Makrokontinuum betrachtet. Es wird angenommen, dass $\|\mathbf{U}_e - \mathbf{1}\|$ und $\|\bar{\mathbf{U}}_e - \mathbf{1}\|$ sehr klein sind. In diesem Fall gelten die folgenden asymptotischen Darstellungen:

$$\mathbf{U}_e = \mathbf{1} + \mathcal{O}(\epsilon_e) \quad , \quad \mathbf{V}_e = \mathbf{1} + \mathcal{O}(\epsilon_e) \quad , \quad (3.106)$$

$$\bar{\mathbf{U}}_e = \mathbf{1} + \mathcal{O}(\epsilon_e) \quad , \quad \bar{\mathbf{V}}_e = \mathbf{1} + \mathcal{O}(\epsilon_e) \quad , \quad (3.107)$$

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{R}_e + \mathcal{O}(\epsilon_e) \quad , \quad \mathbf{R}_e = \bar{\mathbf{R}}_e + \mathcal{O}(\epsilon_e) \quad , \quad (3.108)$$

wobei

$$\epsilon_e := \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{R}_t, t \geq 0} \{ \|\mathbf{U}_e - \mathbf{1}\|, \|\bar{\mathbf{U}}_e - \mathbf{1}\| \} \quad . \quad (3.109)$$

In Anlehnung an ERINGEN [36] wird für den Anteil der elastischen freien Energiefunktion Ψ_e ein quadratischer Ansatz der Form

$$\begin{aligned} \Psi_e = \frac{1}{2\varrho_R} \{ & \lambda(\text{tr}\hat{\epsilon}_e)^2 + (\mu + \alpha)\hat{\epsilon}_e \cdot \hat{\epsilon}_e + (\mu - \alpha)\hat{\epsilon}_e \cdot \hat{\epsilon}_e^T \\ & + \beta(\text{tr}\hat{\mathbf{K}}_e)^2 + (\gamma + \delta)\hat{\mathbf{K}}_e \cdot \hat{\mathbf{K}}_e + (\gamma - \delta)\hat{\mathbf{K}}_e \cdot \hat{\mathbf{K}}_e^T \} \end{aligned} \quad (3.110)$$

gewählt, wobei $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Elastizitätskonstanten darstellen. Dabei sind λ und μ die aus der klassischen Elastizitätstheorie bekannten Laméschen Konstanten. Aus Gleichung (3.24) folgt für die Spannung $\hat{\mathbf{T}}$ zunächst:

$$\hat{\mathbf{T}} = \lambda(\text{tr}\hat{\epsilon}_e)\mathbf{1} + (\mu + \alpha)\hat{\epsilon}_e + (\mu - \alpha)\hat{\epsilon}_e^T \quad . \quad (3.111)$$

Da die elastischen Verzerrungen als klein vorausgesetzt wurden, gelten die Approximationen

$$\epsilon_e = \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\epsilon}_e \mathbf{F}_e^{-1} \approx \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\epsilon}_e \bar{\mathbf{R}}_e^T \quad , \quad (3.112)$$

$$\mathbf{S} = \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\mathbf{T}} \mathbf{F}_e^T \approx \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{R}}_e^T \quad , \quad (3.113)$$

so dass sich folgende Beziehung in der Momentankonfiguration \mathcal{R}_t ergibt:

$$\mathbf{S} = \lambda(\text{tr}\epsilon_e)\mathbf{1} + (\mu + \alpha)\epsilon_e + (\mu - \alpha)\epsilon_e^T \quad . \quad (3.114)$$

Für die Momentenspannung folgt aus (3.25) und (3.110)

$$\hat{\mathbf{T}}_c = \beta(\text{tr}\hat{\mathbf{K}}_e)\mathbf{1} + (\gamma + \delta)\hat{\mathbf{K}}_e + (\gamma - \delta)\hat{\mathbf{K}}_e^T \quad . \quad (3.115)$$

Die Annahme kleiner elastischer Verzerrungen ändert nichts am Transformationsverhalten des mikropolaren Krümmungs- und Momentenspannungstensors. Damit lautet die Momentenspannungsbeziehung in der Momentankonfiguration \mathcal{R}_t

$$\mathbf{S}_c = \beta(\text{tr}\mathbf{K}_e)\mathbf{1} + (\gamma + \delta)\mathbf{K}_e + (\gamma - \delta)\mathbf{K}_e^T \quad . \quad (3.116)$$

Die in der konstitutiven Theorie vorkommenden Mandelschen Tensoren müssen ebenso in die Momentankonfiguration transformiert werden. Mit den obigen Betrachtungen ergibt sich für den Mandelschen Spannungstensor folgende Umrechnung

$$\hat{\mathbf{P}} = (\mathbf{1} + \hat{\epsilon}_e^T)\hat{\mathbf{T}} \approx \hat{\mathbf{T}} \approx \bar{\mathbf{R}}_e^T \mathbf{S} \bar{\mathbf{R}}_e \quad . \quad (3.117)$$

Aus Tabelle B.12 ist ersichtlich, dass \mathbf{S}_c als Eulersche Entsprechung von $\hat{\mathbf{P}}_c = \hat{\mathbf{T}}_c$ angenommen werden kann

$$\hat{\mathbf{P}}_c = \hat{\mathbf{T}}_c = \bar{\mathbf{R}}_e^T \mathbf{S}_c \bar{\mathbf{R}}_e \quad . \quad (3.118)$$

Für die kinematische Verfestigung werden die Tensoren $\mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{Y}_c, \boldsymbol{\xi}_c$ relativ zu \mathcal{R}_t wie folgt definiert

$$\mathbf{Y} := \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\mathbf{Y}} \mathbf{F}_e^{-1} \approx \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\mathbf{Y}} \bar{\mathbf{R}}_e^T, \quad (3.119)$$

$$\mathbf{Z} := \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_e^T \approx \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\mathbf{Z}} \bar{\mathbf{R}}_e^T, \quad (3.120)$$

$$\boldsymbol{\xi} := (\mathbf{1} - \mathbf{Y}^T) \mathbf{Z}, \quad (3.121)$$

$$\mathbf{Y}_c := \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\mathbf{Y}}_c^T \bar{\mathbf{R}}_e^T, \quad (3.122)$$

$$\boldsymbol{\xi}_c := \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\boldsymbol{\xi}}_c \bar{\mathbf{R}}_e^T, \quad (3.123)$$

so dass

$$\hat{\boldsymbol{\xi}} = (\mathbf{1} - \hat{\mathbf{Y}}^T) \hat{\mathbf{Z}} \approx \bar{\mathbf{R}}_e^T (\mathbf{1} - \mathbf{Y}^T) \mathbf{Z} \bar{\mathbf{R}}_e = \bar{\mathbf{R}}_e^T \boldsymbol{\xi} \bar{\mathbf{R}}_e. \quad (3.124)$$

Für die Fließfunktion in der Zwischenkonfiguration $\hat{\mathcal{R}}_t$ wird der folgende Ansatz gewählt (vgl. DE BORST [16]):

$$\begin{aligned} f &= \hat{f}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{P}}_c, \hat{\boldsymbol{\xi}}, \hat{\boldsymbol{\xi}}_c, k) \\ &= \left((\alpha_1 + \alpha_2) (\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^D \cdot (\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^D + (\alpha_1 - \alpha_2) (\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^D \cdot (\hat{\mathbf{P}}^T - \hat{\boldsymbol{\xi}}^T)^D \right. \\ &\quad \left. + (\alpha_3 + \alpha_4) (\hat{\mathbf{P}}_c - \hat{\boldsymbol{\xi}}_c)^D \cdot (\hat{\mathbf{P}}_c - \hat{\boldsymbol{\xi}}_c)^D + (\alpha_3 - \alpha_4) (\hat{\mathbf{P}}_c - \hat{\boldsymbol{\xi}}_c)^D \cdot (\hat{\mathbf{P}}_c^T - \hat{\boldsymbol{\xi}}_c^T)^D \right)^{\frac{1}{2}} - k. \end{aligned} \quad (3.125)$$

Die Größen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und α_4 stellen Materialparameter dar. Relativ zur Momentankonfiguration \mathcal{R}_t gilt

$$\begin{aligned} f &= \left((\alpha_1 + \alpha_2) (\mathbf{S} - \boldsymbol{\xi})^D \cdot (\mathbf{S} - \boldsymbol{\xi})^D + (\alpha_1 - \alpha_2) (\mathbf{S} - \boldsymbol{\xi})^D \cdot (\mathbf{S}^T - \boldsymbol{\xi}^T)^D \right. \\ &\quad \left. + (\alpha_3 + \alpha_4) (\mathbf{S}_c - \boldsymbol{\xi}_c)^D \cdot (\mathbf{S}_c - \boldsymbol{\xi}_c)^D + (\alpha_3 - \alpha_4) (\mathbf{S}_c - \boldsymbol{\xi}_c)^D \cdot (\mathbf{S}_c^T - \boldsymbol{\xi}_c^T)^D \right)^{\frac{1}{2}} - k. \end{aligned} \quad (3.126)$$

Zur Bestimmung der Norm der Fließfunktion werden die folgenden Ableitungen benötigt:

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}} = \frac{1}{f+k} \left((\alpha_1 + \alpha_2) (\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^D + (\alpha_1 - \alpha_2) (\hat{\mathbf{P}}^T - \hat{\boldsymbol{\xi}}^T)^D \right), \quad (3.127)$$

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{P}}_c} = \frac{1}{f+k} \left((\alpha_3 + \alpha_4) (\hat{\mathbf{P}}_c - \hat{\boldsymbol{\xi}}_c)^D + (\alpha_3 - \alpha_4) (\hat{\mathbf{P}}_c^T - \hat{\boldsymbol{\xi}}_c^T)^D \right). \quad (3.128)$$

Damit ergibt sich für die Norm in der Zwischenkonfiguration $\hat{\mathcal{R}}_t$

$$\begin{aligned} \|f\| &= \frac{1}{f+k} \left\{ \left((\alpha_1 + \alpha_2) (\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^D + (\alpha_1 - \alpha_2) (\hat{\mathbf{P}}^T - \hat{\boldsymbol{\xi}}^T)^D \right) \cdot \right. \\ &\quad \left((\alpha_1 + \alpha_2) (\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^D + (\alpha_1 - \alpha_2) (\hat{\mathbf{P}}^T - \hat{\boldsymbol{\xi}}^T)^D \right) \\ &\quad \left. + \left((\alpha_3 + \alpha_4) (\hat{\mathbf{P}}_c - \hat{\boldsymbol{\xi}}_c)^D + (\alpha_3 - \alpha_4) (\hat{\mathbf{P}}_c^T - \hat{\boldsymbol{\xi}}_c^T)^D \right) \cdot \right. \\ &\quad \left. \left((\alpha_3 + \alpha_4) (\hat{\mathbf{P}}_c - \hat{\boldsymbol{\xi}}_c)^D + (\alpha_3 - \alpha_4) (\hat{\mathbf{P}}_c^T - \hat{\boldsymbol{\xi}}_c^T)^D \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.129)$$

bzw. in der Momentankonfiguration \mathcal{R}_t

$$\begin{aligned} \|f\| = \frac{1}{f+k} & \left\{ ((\alpha_1 + \alpha_2)(\mathbf{S} - \boldsymbol{\xi})^D + (\alpha_1 - \alpha_2)(\mathbf{S}^T - \boldsymbol{\xi}^T)^D) \cdot \right. \\ & ((\alpha_1 + \alpha_2)(\mathbf{S} - \boldsymbol{\xi})^D + (\alpha_1 - \alpha_2)(\mathbf{S}^T - \boldsymbol{\xi}^T)^D) \\ & + ((\alpha_3 + \alpha_4)(\mathbf{S}_c - \boldsymbol{\xi}_c)^D + (\alpha_3 - \alpha_4)(\mathbf{S}_c^T - \boldsymbol{\xi}_c^T)^D) \cdot \\ & \left. ((\alpha_3 + \alpha_4)(\mathbf{S}_c - \boldsymbol{\xi}_c)^D + (\alpha_3 - \alpha_4)(\mathbf{S}_c^T - \boldsymbol{\xi}_c^T)^D) \right\}^{\frac{1}{2}} . \end{aligned} \quad (3.130)$$

Aus der Fließregel (3.53) folgt für $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p$:

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \frac{\dot{s}}{\|f\|} \frac{1}{f+k} \left((\alpha_1 + \alpha_2)(\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^D + (\alpha_1 - \alpha_2)(\hat{\mathbf{P}}^T - \hat{\boldsymbol{\xi}}^T)^D \right) . \quad (3.131)$$

Wegen der Annahme kleiner elastischer Verzerrungen ergibt sich für $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p$ die Transformationsbeziehung

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p \mathbf{F}_e^{-1} \approx \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p \bar{\mathbf{R}}_e^T , \quad (3.132)$$

so dass

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \frac{\dot{s}}{\|f\|} \frac{1}{f+k} \left((\alpha_1 + \alpha_2)(\mathbf{S} - \boldsymbol{\xi})^D + (\alpha_1 - \alpha_2)(\mathbf{S}^T - \boldsymbol{\xi}^T)^D \right) . \quad (3.133)$$

Die Normalenregel für den mikropolaren plastischen Krümmungstensor lautet in der Zwischenkonfiguration $\hat{\mathcal{R}}_t$ (vgl. Gleichung (3.54))

$$\hat{\mathbf{K}}_p = \frac{\dot{s}}{\|f\|} \frac{1}{f+k} \left((\alpha_3 + \alpha_4)(\hat{\mathbf{P}}_c - \hat{\boldsymbol{\xi}}_c)^D + (\alpha_3 - \alpha_4)(\hat{\mathbf{P}}_c^T - \hat{\boldsymbol{\xi}}_c^T)^D \right) \quad (3.134)$$

und in der Momentankonfiguration \mathcal{R}_t

$$\hat{\mathbf{K}}_p = \frac{\dot{s}}{\|f\|} \frac{1}{f+k} \left((\alpha_3 + \alpha_4)(\mathbf{S}_c - \boldsymbol{\xi}_c)^D + (\alpha_3 - \alpha_4)(\mathbf{S}_c^T - \boldsymbol{\xi}_c^T)^D \right) . \quad (3.135)$$

Das Transformationsverhalten für $\hat{\mathbf{Y}}$ lautet bei der Annahme kleiner elastischer Verzerrungen

$$\hat{\mathbf{Y}} = \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\mathbf{Y}} \mathbf{F}_e^{-1} \approx \bar{\mathbf{R}}_e \hat{\mathbf{Y}} \bar{\mathbf{R}}_e^T . \quad (3.136)$$

Damit folgt die Darstellung der Evolutionsgleichung für $\hat{\mathbf{Y}}$ in der Momentankonfiguration

$$\dot{\hat{\mathbf{Y}}} = \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p - \dot{s}((b_1 - b_2)\mathbf{Z} + (b_1 - b_2)\mathbf{Z}^T) = \dot{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\Omega}_p \mathbf{Y} + \mathbf{Y} \mathbf{L}_p . \quad (3.137)$$

Für $\hat{\mathbf{Y}}_c$ gilt bezüglich der Momentankonfiguration \mathcal{R}_t folgende Darstellung:

$$\dot{\hat{\mathbf{Y}}}_c = \hat{\mathbf{K}}_p - \dot{s}((b_{c1} + b_{c2})\hat{\boldsymbol{\xi}}_c + (b_{c1} - b_{c2})\hat{\boldsymbol{\xi}}_c^T) = \dot{\mathbf{Y}}_c - \boldsymbol{\Omega}_p \mathbf{Y}_c + \mathbf{Y}_c \boldsymbol{\Omega}_p^T . \quad (3.138)$$

Der Anteil der plastischen freien Energiefunktion zur Beschreibung der kinematischen Verfestigung soll in den Variablen der kinematischen Verfestigung höchstens vom zweiten Grade sein. Somit ergibt sich der gleiche Ansatz wie für die elastische freie Energiefunktion (3.110),

$$\Psi_p^{(kin)} = \frac{1}{2\varrho_R} \left\{ c_1(\text{tr}\hat{\mathbf{Y}})^2 + (c_2 + c_3)\hat{\mathbf{Y}} \cdot \hat{\mathbf{Y}} + (c_2 - c_3)\hat{\mathbf{Y}} \cdot \hat{\mathbf{Y}}^T + c_4(\text{tr}\hat{\mathbf{Y}}_c)^2 + (c_5 + c_6)\hat{\mathbf{Y}}_c \cdot \hat{\mathbf{Y}}_c + (c_5 - c_6)\hat{\mathbf{Y}}_c \cdot \hat{\mathbf{Y}}_c^T \right\} , \quad (3.139)$$

wobei c_1, \dots, c_6 Materialparameter sind. Für die spannungsartigen Größen $\hat{\mathbf{Z}}$ und $\hat{\boldsymbol{\xi}}_c$ ergibt sich aus (3.72) und (3.73) bezüglich der Zwischenkonfiguration $\hat{\mathcal{R}}_t$

$$\hat{\mathbf{Z}} = c_1(\text{tr}\hat{\mathbf{Y}})\mathbf{1} + (c_2 + c_3)\hat{\mathbf{Y}} + (c_2 - c_3)\hat{\mathbf{Y}}^T , \quad (3.140)$$

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_c = c_4(\text{tr}\hat{\mathbf{Y}}_c)\mathbf{1} + (c_5 + c_6)\hat{\mathbf{Y}}_c + (c_5 - c_6)\hat{\mathbf{Y}}_c^T \quad (3.141)$$

und bezüglich der Momentankonfiguration \mathcal{R}_t

$$\mathbf{Z} = c_1(\text{tr}\mathbf{Y})\mathbf{1} + (c_2 + c_3)\mathbf{Y} + (c_2 - c_3)\mathbf{Y}^T , \quad (3.142)$$

$$\boldsymbol{\xi}_c = c_4(\text{tr}\mathbf{Y}_c)\mathbf{1} + (c_5 + c_6)\mathbf{Y}_c + (c_5 - c_6)\mathbf{Y}_c^T . \quad (3.143)$$

4 Finite-Elemente-Formulierung des mikropolaren Kontinuums

In den vorangegangenen Kapiteln wurde die erweiterte Kinematik und das dazugehörige Materialmodell zur Beschreibung elastisch-inelastischen mikropolaren Materialverhaltens bei großen Deformationen hergeleitet. Um beliebige mechanische Strukturen als Anfangsrandwertprobleme betrachten zu können, muss das entwickelte konstitutive Modell mittels eines numerischen Verfahrens umgesetzt werden. In der vorliegenden Arbeit geschieht dies mit Hilfe der Methode der finiten Elemente. Grundlegende Lehrbücher zur Thematik der finiten Elemente sind beispielsweise BATHE [9], HUGHES [53], ZIENKIEWICZ & TAYLOR [99], [100], SCHWARZ [77], REDDY [75], CRISFIELD [25], [26], BELYTSCHKO ET AL. [11] und WRIGGERS [97].

In diesem Kapitel werden für die Finite-Elemente-Methode aus der starken Form des quasistatischen Randwertproblems die schwache Formulierung des Gleichgewichts für mikropolares Materialverhalten und die konsistente Linearisierung der schwachen Form hergeleitet. Die Herleitung geht im Prinzip zurück auf STEINMANN [81]. Auf der Basis dieser Grundgleichungen erfolgt die Beschreibung der Methode der finiten Elemente mittels Einführung einer Diskretisierung und einer isoparametrischen Interpolation. Bei der Integration der Gleichungen findet das Operator-Split-Verfahren Anwendung. Aus den Gleichungen auf Elementebene werden die globalen Gleichungen assembliert und in einer globalen Gleichgewichtsiteration gelöst. Die Finite-Elemente-Methode kann auf beliebige Elementformulierungen angewandt werden. Hier wird ein eigenständig entwickeltes dreidimensionales 8-Knoten-Volumenelement mit Verschiebungs- und Rotationsfreiheitsgraden betrachtet. Dieses Element wird über die Benutzerschnittstelle UEL in das kommerzielle Finite-Elemente-Programm ABAQUS implementiert (siehe dazu die ABAQUS Handbücher [1] und [2]).

4.1 Darstellung des quasistatischen Randwertproblems

Die schwache Formulierung des Gleichgewichts stellt die Grundlage der räumlichen Diskretisierung dar und ist der Ausgangspunkt für die Anwendung der Finite-Elemente-Methode. Eine Darstellung der Vorgehensweise bei klassischen Kontinua findet sich in BATHE [9], HUGHES [53], ZIENKIEWICZ & TAYLOR [99], [100], SCHWARZ [77], REDDY [75], CRISFIELD [25], [26], BELYTSCHKO ET AL. [11], WRIGGERS [97] und BONET & WOOD [14].

4.1.1 Starke Formulierung des quasistatischen Randwertproblems

Zur vollständigen Formulierung des quasistatischen Randwertproblems für mikropolares Materialverhalten werden neben den kinematischen Größen, den Bilanzgleichungen und den konstitutiven Beziehungen Bedingungen für die Oberfläche $\partial\mathcal{R}_t$ des betrachteten materiellen Körpers benötigt. Auf den Teilflächen $\partial\mathcal{R}_t^{\mathbf{u}}$ und $\partial\mathcal{R}_t^{\boldsymbol{\omega}}$ werden wesentliche oder Dirichlet-Randbedingungen für die Verschiebungen (sog. Verschiebungsrandbedingungen)

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 \quad \text{auf} \quad \partial\mathcal{R}_t^{\mathbf{u}} \quad (4.1)$$

sowie für die Rotationen (sog. Rotationsrandbedingungen)

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^0 \quad \text{auf} \quad \partial\mathcal{R}_t^{\boldsymbol{\omega}} \quad (4.2)$$

vorgegeben. Dabei stellt $\boldsymbol{\omega}$ den axialen Vektor zum antisymmetrischen Tensor $\mathbf{W}_{\boldsymbol{\omega}}$ dar, der dem Rotationstensor $\bar{\mathbf{R}}$ des Mikrokontinuums zugeordnet wird (vgl. Gleichungen (1.25) und (1.26))

$$\bar{\mathbf{R}} = \exp(\mathbf{W}_{\boldsymbol{\omega}}) = \exp(\text{Spn}(\boldsymbol{\omega})) \quad . \quad (4.3)$$

Auf den Teilrändern $\partial\mathcal{R}_t^{\mathbf{t}}$ und $\partial\mathcal{R}_t^{\mathbf{t}^c}$ gelten natürliche oder Neumann-Randbedingungen für die Kraftspannungen (sog. Spannungsrandbedingungen)

$$\mathbf{T}\mathbf{n} = \mathbf{t}^0 \quad \text{auf} \quad \partial\mathcal{R}_t^{\mathbf{t}} \quad (4.4)$$

und für die Momentenspannungen (sog. Momentenspannungsrandbedingungen)

$$\mathbf{T}_c\mathbf{n} = \mathbf{t}_c^0 \quad \text{auf} \quad \partial\mathcal{R}_t^{\mathbf{t}^c} \quad . \quad (4.5)$$

Dabei stellt \mathbf{n} die nach außen gerichtete Einheitsnormale der Oberfläche $\partial\mathcal{R}_t$ dar. Der kinematische Rand $\partial\mathcal{R}_t^{\mathbf{u}}$ sowie $\partial\mathcal{R}_t^{\boldsymbol{\omega}}$ und der statische Rand $\partial\mathcal{R}_t^{\mathbf{t}}$ sowie $\partial\mathcal{R}_t^{\mathbf{t}^c}$ müssen zusätzlich die Beziehungen

$$\partial\mathcal{R}_t^{\mathbf{u}} \cup \partial\mathcal{R}_t^{\mathbf{t}} = \partial\mathcal{R}_t \quad \wedge \quad \partial\mathcal{R}_t^{\mathbf{u}} \cap \partial\mathcal{R}_t^{\mathbf{t}} = \emptyset \quad , \quad (4.6)$$

$$\partial\mathcal{R}_t^{\boldsymbol{\omega}} \cup \partial\mathcal{R}_t^{\mathbf{t}^c} = \partial\mathcal{R}_t \quad \wedge \quad \partial\mathcal{R}_t^{\boldsymbol{\omega}} \cap \partial\mathcal{R}_t^{\mathbf{t}^c} = \emptyset \quad (4.7)$$

erfüllen. Die Gleichgewichtsbedingungen für die im Weiteren betrachteten quasistatischen Deformationsprozesse lauten

$$\text{div}\mathbf{T} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad , \quad (4.8)$$

$$\text{div}\mathbf{T}_c + \mathbf{t}_T + \mathbf{b}_c = \mathbf{0} \quad . \quad (4.9)$$

Diese bilden zusammen mit den Randbedingungen, den kinematischen Größen und den konstitutiven Gleichungen das zu lösende Randwertproblem in seiner starken Form. Somit können für gegebenes \mathbf{b} und \mathbf{b}_c die gesuchten Größen \mathbf{u} und $\boldsymbol{\omega}$ berechnet werden.

4.1.2 Schwache Formulierung des quasistatischen Randwertproblems

In Anlehnung an das Prinzip der virtuellen Verschiebungen bei nicht polaren Kontinua (siehe hierzu HUGHES [53], SCHWARZ [77] oder REDDY [75]) wird ein verallgemeinertes Prinzip der virtuellen Verschiebungen und virtuellen Rotationen für mikropolare Medien vorgestellt (siehe STEINMANN [81], [82], ERINGEN [36] und ELSÄSSER [34]). Die Gleichgewichtsbedingungen werden mit sogenannten Testfunktionen (auch Variationen genannt) multipliziert. Die lokale Impulsbilanz wird skalar mit einer vektorwertigen Funktion $\delta \mathbf{u}$ (virtuelle Verschiebung) multipliziert,

$$\operatorname{div} \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} = 0 \quad , \quad (4.10)$$

die lokale Drehimpulsbilanz skalar mit einer vektorwertigen Funktion $\delta \mathbf{v}$ (virtuelle Rotation)

$$\operatorname{div} \mathbf{T}_c \cdot \delta \mathbf{v} + \mathbf{t}_T \cdot \delta \mathbf{v} + \mathbf{b}_c \cdot \delta \mathbf{v} = 0 \quad . \quad (4.11)$$

Die Bedeutung von $\delta \mathbf{v}$ als virtuelle Rotation kann wie folgt verstanden werden. Aus Gleichung (4.3) ist ersichtlich, dass der mikropolare Rotationstensor $\bar{\mathbf{R}}$ als Funktion des axialen Vektors $\boldsymbol{\omega}$ dargestellt werden kann, d. h. $\bar{\mathbf{R}}_{\boldsymbol{\omega}} := \bar{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\omega})$. Wird an die Rotation $\bar{\mathbf{R}}_{\boldsymbol{\omega}}$ eine weitere Rotation \mathbf{P} angeschlossen, dann gilt für die resultierende Gesamtrotation $\bar{\mathbf{R}}$

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{P} \bar{\mathbf{R}}_{\boldsymbol{\omega}} \quad . \quad (4.12)$$

Es wird angenommen, dass das Feld \mathbf{P} eine Funktion des antisymmetrischen Tensors \mathbf{V} und eines skalaren Parameters ξ ist, so dass

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\xi \mathbf{V}) = \exp(\xi \mathbf{V}) \quad . \quad (4.13)$$

Damit ist die virtuelle Rotation $\delta \bar{\mathbf{R}}$ definiert durch

$$\delta \bar{\mathbf{R}} = \left. \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{P}(\xi \mathbf{V}) \bar{\mathbf{R}}_{\boldsymbol{\omega}} \right|_{\xi=0} \quad \xi \quad . \quad (4.14)$$

Mit Hilfe der Euler-Rodrigues-Formel (1.26) folgt aus Gleichung (4.14), dass

$$\delta \bar{\mathbf{R}} = (\xi \mathbf{V}) \bar{\mathbf{R}}_{\boldsymbol{\omega}} = \delta \mathbf{V} \bar{\mathbf{R}}_{\boldsymbol{\omega}} \quad (4.15)$$

mit

$$\delta \mathbf{V} := \xi \mathbf{V} \quad (4.16)$$

und

$$\delta \mathbf{v} = \operatorname{axl}(\delta \mathbf{V}) \quad . \quad (4.17)$$

Die anschließende Integration über das Volumen des betrachteten materiellen Körpers liefert

$$\int_{\mathcal{R}_t} \operatorname{div} \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{u} dv + \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dv = 0 \quad , \quad (4.18)$$

$$\int_{\mathcal{R}_t} \operatorname{div} \mathbf{T}_c \cdot \delta \mathbf{v} dv + \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{t}_T \cdot \delta \mathbf{v} dv + \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{b}_c \cdot \delta \mathbf{v} dv = 0 \quad . \quad (4.19)$$

Die partielle Integration des ersten Terms von (4.18) mit nachfolgender Anwendung des Divergenztheorems und der Einarbeitung der Spannungsrandbedingungen liefert

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{R}_t} \operatorname{div} \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\delta} \mathbf{u} dv &= \int_{\mathcal{R}_t} \operatorname{div}(\mathbf{T}^T \boldsymbol{\delta} \mathbf{u}) dv - \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{T} \cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{\delta} \mathbf{u} dv \\
 &= \int_{\partial \mathcal{R}_t} \mathbf{T}^T \boldsymbol{\delta} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} da - \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{T} \cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{\delta} \mathbf{u} dv \\
 &= \int_{\partial \mathcal{R}_t} \boldsymbol{\delta} \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \mathbf{n} da - \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{T} \cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{\delta} \mathbf{u} dv \\
 &= \int_{\partial \mathcal{R}_t^{\mathbf{t}^0}} \boldsymbol{\delta} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}^0 da - \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{T} \cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{\delta} \mathbf{u} dv \quad .
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Für den ersten Term von (4.19) ergibt sich analog

$$\int_{\mathcal{R}_t} \operatorname{div} \mathbf{T}_c \cdot \boldsymbol{\delta} \mathbf{v} dv = \int_{\partial \mathcal{R}_t^{\mathbf{t}_c^0}} \mathbf{t}_c^0 \cdot \boldsymbol{\delta} \mathbf{v} da - \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{T}_c \cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{\delta} \mathbf{v} dv \quad . \tag{4.21}$$

Insgesamt gilt

$$\mathcal{F}_{\mathbf{T}} := \int_{\partial \mathcal{R}_t^{\mathbf{t}^0}} \mathbf{t}^0 \cdot \boldsymbol{\delta} \mathbf{u} da + \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\delta} \mathbf{u} dv - \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{T} \cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{\delta} \mathbf{u} dv = 0 \tag{4.22}$$

und

$$\mathcal{F}_{\mathbf{T}_c} := \int_{\partial \mathcal{R}_t^{\mathbf{t}_c^0}} \mathbf{t}_c^0 \cdot \boldsymbol{\delta} \mathbf{v} da + \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{b}_c \cdot \boldsymbol{\delta} \mathbf{v} dv - \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{T}_c \cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{\delta} \mathbf{v} dv + \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\delta} \mathbf{V} dv = 0 \tag{4.23}$$

mit

$$\boldsymbol{\delta} \mathbf{V} = \operatorname{Spn}(\boldsymbol{\delta} \mathbf{v}) \tag{4.24}$$

und der Nebenrechnung

$$\mathbf{t}_T \cdot \boldsymbol{\delta} \mathbf{v} \hat{=} (t_T)_k \delta v_k = e_{ijk} T_{ji} \delta v_k = T_{ji} e_{ijk} \delta v_k = T_{ji} \delta V_{ji} \hat{=} \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\delta} \mathbf{V} \quad . \tag{4.25}$$

Hierbei stellen $\mathcal{F}_{\mathbf{T}}$ und $\mathcal{F}_{\mathbf{T}_c}$ jeweils ein Funktional von \mathbf{u} , $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\delta} \mathbf{u}$ und $\boldsymbol{\delta} \mathbf{v}$ dar

$$\mathcal{F}_{\mathbf{T}} := \mathcal{F}_{\mathbf{T}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\delta} \mathbf{u}, \boldsymbol{\delta} \mathbf{v}) = 0 \quad , \tag{4.26}$$

$$\mathcal{F}_{\mathbf{T}_c} := \mathcal{F}_{\mathbf{T}_c}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\delta} \mathbf{u}, \boldsymbol{\delta} \mathbf{v}) = 0 \quad . \tag{4.27}$$

Die gesuchten Lösungsfunktionen \mathbf{u} für die Verschiebungen und $\boldsymbol{\omega}$ für die Rotationen entstammen den Funktionenräumen

$$\mathcal{S} = \{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in \mathcal{H}^1, \mathbf{u} = \mathbf{u}^0 \text{ auf } \partial \mathcal{R}_t^{\mathbf{u}} \} \quad , \tag{4.28}$$

$$\mathcal{T} = \{ \boldsymbol{\omega} \mid \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{H}^1, \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^0 \text{ auf } \partial \mathcal{R}_t^{\boldsymbol{\omega}} \} \quad , \tag{4.29}$$

während die Mengen aller möglichen unabhängigen Variationen bzw. Testfunktionen $\delta \mathbf{u}$ und $\delta \mathbf{v}$ durch

$$\mathcal{V} = \{ \delta \mathbf{u} \mid \delta \mathbf{u} \in \mathcal{H}^1, \delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ auf } \partial \mathcal{R}_t^u \} \quad , \quad (4.30)$$

$$\mathcal{W} = \{ \delta \mathbf{v} \mid \delta \mathbf{v} \in \mathcal{H}^1, \delta \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ auf } \partial \mathcal{R}_t^\omega \} \quad (4.31)$$

gegeben sind. Hierbei ist \mathcal{H}^1 die Menge aller Funktionen, deren erste partielle Ableitung über \mathcal{R}_t quadrat-integrabel ist. Von den Lösungsfunktionen wird also lediglich die Erfüllung der wesentlichen Randbedingungen gefordert. Für die Testfunktionen gelten die entsprechenden homogenen Randbedingungen. Die Gleichungen (4.22) und (4.23) entsprechen zusammen mit den kinematischen und den konstitutiven Beziehungen der schwachen Form des quasistatischen Randwertproblems für mikropolares Materialverhalten.

Wegen des Fundamentallemmas der Variationsrechnung kann auch bei mikropolarem Materialverhalten gezeigt werden, dass die Lösung der schwachen Form des quasistatischen Randwertproblems äquivalent zu der Lösung der starken Formulierung des quasistatischen Randwertproblems ist (siehe dazu ELSÄSSER [34]).

4.1.3 Räumliche Diskretisierung des quasistatischen Randwertproblems

Bei der Methode der finiten Elemente werden verschiedene Approximationen vorgenommen. Zum einen wird das zu untersuchende Gebiet mit finiten Elementen diskretisiert, zum anderen werden die Feldgrößen (wie Verschiebungen, Rotationen usw.) approximiert. Schließlich werden auch die auftretenden Integrale nicht mehr exakt bestimmt, sondern mittels numerischer Integration berechnet. Es ergibt sich eine Näherungslösung des betrachteten mechanischen Problems.

Die Bestimmung einer Näherungslösung kann mit Hilfe verschiedener Ansätze geschehen (siehe zum Beispiel HUGHES [53], SCHWARZ [77] oder REDDY [75]). Die Äquivalenz der schwachen Formulierung für mikropolare Kontinua zur Methode der gewichteten Residuen erfolgt durch die Einschränkung der Funktionenräume \mathcal{S} , \mathcal{T} , \mathcal{V} und \mathcal{W} auf deren endlich dimensionale Näherungen \mathcal{S}^G , \mathcal{T}^G , \mathcal{V}^G und \mathcal{W}^G . Dabei entsprechen die Testfunktionen bzw. Variationen den Gewichtsfunktionen. Die Näherungslösung muss folglich die Forderung erfüllen, dass ihre Residuen im integralen Mittel verschwinden. Des Weiteren wurde in dieser Arbeit das Galerkin-Verfahren verwendet, das eine spezielle Form der Methode der gewichteten Residuen ist. Charakteristisch für dieses Verfahren ist die Wahl der Funktionenräume. Das heißt, die gesuchten Lösungsfunktionen \mathbf{u} und $\boldsymbol{\omega}$ stammen aus demselben Funktionenraum wie ihre zugehörigen Gewichtsfunktionen $\delta \mathbf{u}$ und $\delta \mathbf{v}$. Weitere Einzelheiten können der Arbeit von ELSÄSSER [34] entnommen werden.

Entsprechend der Methode der finiten Elemente erfolgt eine Zerlegung des Gesamtkörpers \mathcal{B} in eine endliche Anzahl n_e von abgeschlossenen Teilkörpern (finite Elemente) \mathcal{B}_i , $i = 1, \dots, n_e$ (siehe zum Beispiel BATHE [9], HUGHES [53], ZIENKIEWICZ & TAYLOR [99], [100], SCHWARZ [77] oder REDDY [75]). Die Vereinigung aller \mathcal{B}_i muss wieder den Gesamtkörper \mathcal{B} ergeben. Die Diskretisierung hat im Allgemeinen einen Approximationsfehler in der Geometriebeschreibung zur Folge. Die geometrische Zerlegung erfolgt durch die Auswahl spezieller Punkte, den sogenannten

Knoten. Bei der so erfolgten Diskretisierung des Lösungsgebietes reduziert sich die Anzahl der unbekanntenen Größen, da anstatt der unendlich vielen materiellen Punkte des Lösungsgebietes nur endlich viele diskrete Knotenpunkte berücksichtigt werden. Diese sind dann die Unbekannten des Problems. Bei den in dieser Arbeit betrachteten finiten Elementen handelt es sich ausschließlich um dreidimensionale Volumenelemente mit acht Eckknoten.

Als Bestandteil des Problems sind Ansatzfunktionen (auch Formfunktionen genannt) für die zu approximierenden Feldgrößen innerhalb der einzelnen Elemente zu wählen. Zwischen den Knoten finden Interpolationen statt, die mittels der Ansatzfunktionen durchgeführt werden und von den verschiedenen Elementtypen abhängen (BATHE [9], HUGHES [53], ZIENKIEWICZ & TAYLOR [99], [100], SCHWARZ [77], REDDY [75], CRISFIELD [25], [26], BELYTSCHKO ET AL. [11], WRIGGERS [97], BURNETT [18], BONET & WOOD [14] oder DHATT & TOUZOT [28]). Die Orte der materiellen Punkte im Inneren eines finiten Elementes werden mit Hilfe der Ansatzfunktionen aus den diskreten Knotenkoordinaten interpoliert. Meistens handelt es sich dabei um Polynome eines bestimmten Grades. Im Fall des mikropolaren Kontinuums werden Ansatzfunktionen für die Verschiebung \mathbf{u} und die Rotation $\boldsymbol{\omega}$ sowie den Ort \mathbf{x} benötigt. Die Linearkombination dieser Ansatzfunktionen mit den Knotenvariablen als Koeffizienten liefert den gesamten Lösungsansatz. Während der Entwicklung der Finiten-Elemente-Methode wurde eine Vielzahl von Möglichkeiten zur Interpolation der Feldgrößen und der Geometrie verwendet. Für die meisten Problemstellungen hat sich das isoparametrische Konzept durchgesetzt, bei dem sowohl die Geometrie als auch die Verschiebungen im Elementgebiet durch die gleichen Ansatzfunktionen approximiert werden. Im Rahmen dieser Arbeit wurden für alle drei Größen (Verschiebung \mathbf{u} , Rotation $\boldsymbol{\omega}$ sowie Ort \mathbf{x}) dieselben Formfunktionen gewählt. Bemerkungen zu dieser Wahl der Formfunktionen können den Arbeiten von DIETSCHKE ET AL. [32], VOLK [95] und ELSÄSSER [34] entnommen werden.

Es werden zwei unterschiedliche Knotenmengen eingeführt. Die Menge $\mathcal{M}_{\mathbf{u}}$ berücksichtigt die Knoten mit Verschiebungs- und $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\omega}}$ die Knoten mit Rotationsfreiheitsgraden. Je nach Wahl der Ansatzfunktionen für die Verschiebung \mathbf{u} und die Rotation $\boldsymbol{\omega}$ können die Mengen, wie in dieser Arbeit, gleich sein. Die Ansatzfunktionen können dann wie folgt dargestellt werden (siehe dazu WRIGGERS [97] und ELSÄSSER [34])

$$\mathbf{u} = \sum_{A \in \mathcal{M}_{\mathbf{u}}} N_A^{\mathbf{u}} \mathbf{d}_A^{\mathbf{u}} \quad , \quad (4.32)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{A \in \mathcal{M}_{\boldsymbol{\omega}}} N_A^{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{d}_A^{\boldsymbol{\omega}} \quad (4.33)$$

und

$$\mathbf{x} = \sum_{A \in \mathcal{M}_{\mathbf{u}}} N_A^{\mathbf{u}} \mathbf{x}_A \quad . \quad (4.34)$$

Der Summationsindex A bezeichnet die Knoten des diskretisierten Gebietes, die in der jeweiligen Menge enthalten sind. Mit $N_A^{\mathbf{u}}$ ist die vorgegebene Formfunktion eines Knotens für die Interpolation der Verschiebung und des Ortes gegeben. Entsprechend ist $N_A^{\boldsymbol{\omega}}$ die vorgegebene Formfunktion eines Knotens für die Interpolation der Rotation. Je nach Wahl des Ansatzes

sind N_A^u und N_A^ω identische Polynome oder unterscheiden sich in der Ordnung. Mit \mathbf{d}_A^u und \mathbf{d}_A^ω werden jeweils die zu bestimmende Knotenpunktsverschiebung und -rotation bezeichnet. Mit Hilfe der beliebigen Koeffizienten \mathbf{c}_A^u und \mathbf{c}_A^ω ergibt sich im Rahmen des Galerkin-Verfahrens der folgende Ansatz für die Gewichtsfunktionen

$$\delta \mathbf{u} = \sum_{A \in \mathcal{M}_u} N_A^u \mathbf{c}_A^u \quad , \quad (4.35)$$

$$\delta \mathbf{v} = \sum_{A \in \mathcal{M}_\omega} N_A^\omega \mathbf{c}_A^\omega \quad . \quad (4.36)$$

Durch Einsetzen dieser Ansätze in die schwache Form ergibt sich ein nichtlineares Gleichungssystem. Unter den vielen möglichen Algorithmen zur Lösung nichtlinearer Probleme wird häufig das Newton-Verfahren ausgewählt, weil es den Vorteil der quadratischen Konvergenz in der Nähe der Lösung besitzt (siehe hierzu auch BATHE [9], ZIENKIEWICZ & TAYLOR [99], [100], CRISFIELD [25], [26], BELYTSCHKO ET AL. [11], BONET & WOOD [14] oder WRIGGERS [97]). Bei Anwendung des Newton-Verfahrens entsteht ein lineares Gleichungssystem, das für beliebig gewählte Koeffizienten der Gewichtsfunktionen erfüllt sein muss. Diese Gleichung kann in Matrizenform umgeschrieben werden

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{F} \quad . \quad (4.37)$$

Das zu lösende Problem stellt nun eine Matrixgleichung dar, wobei \mathbf{K} die Gesamtsteifigkeitsmatrix des Systems ist, während \mathbf{d} und \mathbf{F} den gesuchten Lösungsvektor und den verallgemeinerten Kraftvektor darstellen (siehe auch BATHE [9], HUGHES [53], ZIENKIEWICZ & TAYLOR [99], [100], SCHWARZ [77], REDDY [75], CRISFIELD [25], [26], BELYTSCHKO ET AL. [11] und WRIGGERS [97]). Besteht das Finite-Elemente-Modell zum Beispiel aus einem 8-Knoten-Element, so kann die Gleichgewichtsbedingung im dreidimensionalen Fall als ein System von 48 Gleichungen dargestellt werden, d. h. 8 Knoten \times 6 Unbekannte pro Knoten.

Die Integration der auftretenden Integrale erfolgt mittels numerischer Integrationsformeln. Das heißt, das Integral wird durch eine Summe approximiert. Dabei wird an n_g ausgewählten Punkten (den Integrations- oder Gauss-Punkten) der Integrand ausgewertet. Die Multiplikation mit Integrationsgewichten w_g liefert dann eine Näherung des Ausgangsintegrals

$$\int_V f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \sum_{i=1}^{n_g} w_i f(P^i) \quad . \quad (4.38)$$

Die Anzahl n_g und die Position der Integrationspunkte P^i kann der Literatur, etwa BURNETT [18] oder DHATT & TOUZOT [28], entnommen werden. Die Wahl der Integrationspunkte und der Wichtungsfaktoren ist wesentlich für den Integrationsfehler.

4.2 Numerische Lösung des quasistatischen Randwertproblems

4.2.1 Updated-Lagrange-Methode

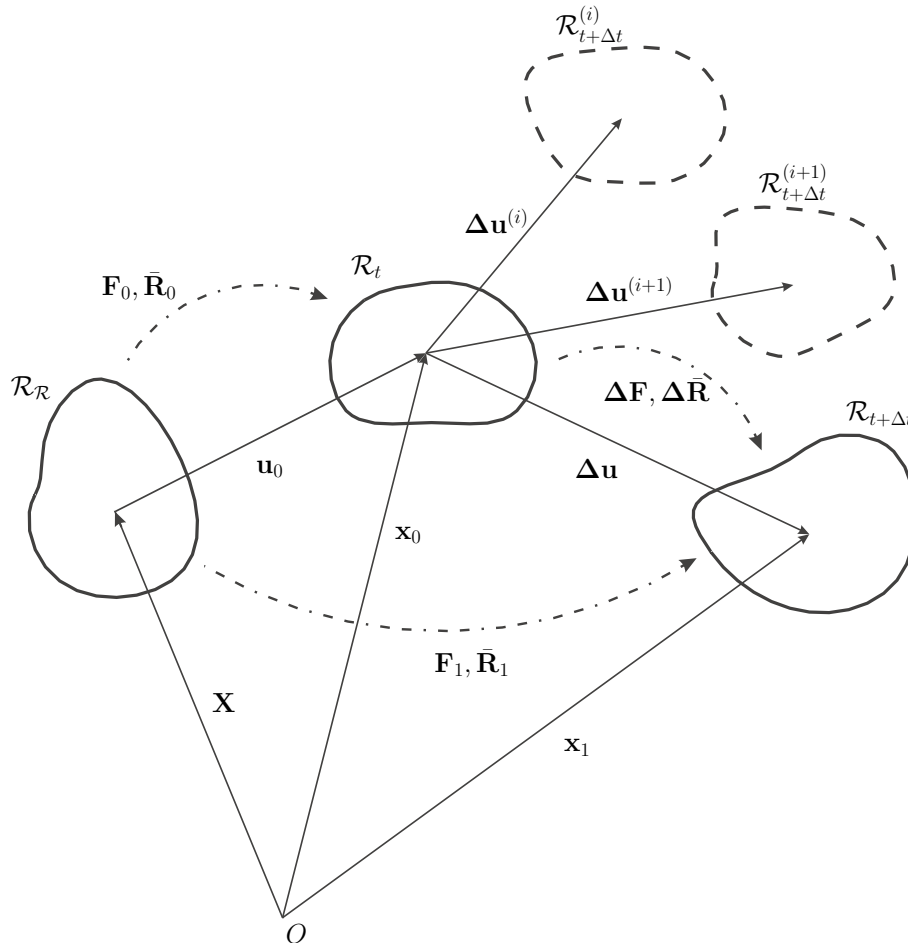


Abbildung 4.1: Inkrementeller Berechnungsablauf bei ABAQUS.

Bei der Lösung eines Randwertproblems für mikropolares Materialverhalten muss zu jedem Zeitpunkt die mikropolare Impuls- und Drehimpulsbilanz bzw. jeweils die räumlich diskretisierte Form erfüllt sein. Die Randbedingungen können nur inkrementell aufgebracht werden, da es sonst nicht möglich ist, eine Lösung für die entsprechende schwache Form zu finden. Da zusätzlich geschichtsabhängige Effekte bei der Materialantwort auftreten, muss eine zeitliche Diskretisierung erfolgen. Die Materialantwort im Sinne der Bestimmung der Gleichgewichtslage wird dann iterativ von Inkrement zu Inkrement gelöst, welche in ABAQUS über die Zeit t gesteuert wird. Ausgehend von der Lösung des Randwertproblems zu einem Zeitpunkt t wird die Lösung zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ gesucht (vgl. JANSOHN [55] und die darin zitierte Literatur). Dazu wird der materielle Körper \mathcal{B} betrachtet. Ausgehend von der Referenzkonfiguration \mathcal{R}_R zum

Zeitpunkt $t = 0$ werden dann Gleichgewichtslagen von \mathcal{B} zu den Zeitpunkten $t_0, t_1, \dots, t, t + \Delta t$ eingenommen (siehe Abbildung 4.1). Befindet sich der Körper \mathcal{B} in einem Gleichgewichtszustand \mathcal{R}_t zum Zeitpunkt t , wird die Gleichgewichtslage zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ iterativ bestimmt. Dabei nimmt der Körper in jedem Iterationsschritt (i) eine deformierte Nichtgleichgewichtslage $\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}$ ein. Ist das Gleichgewicht in der (k)-ten Iteration bestimmt, so fällt $\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(k)}$ mit der Gleichgewichtslage $\mathcal{R}_{t+\Delta t}$ zusammen. Zwischen den benötigten Deformationsgradienten und den mikropolaren Rotationstensoren besteht der Zusammenhang

$$\mathbf{F}_1 = \Delta \mathbf{F} \mathbf{F}_0 \quad (4.39)$$

und

$$\bar{\mathbf{R}}_1 = \Delta \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{R}}_0 \quad . \quad (4.40)$$

In ABAQUS wird mit Größen in der Konfiguration $\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}$ gearbeitet. Auch die konsistente Linearisierung der nichtlinearen Terme in der mikropolaren Impuls- und Drehimpulsbilanz wird bzgl. $\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}$ vorgenommen. Als Referenzkonfiguration wird während der Iteration die Konfiguration \mathcal{R}_t gewählt, also jeweils die letzte Gleichgewichtskonfiguration. Da die Referenzkonfiguration \mathcal{R}_t nach jedem Zeitschritt aktualisiert wird, lässt sich dieses Vorgehen als die Updated-Lagrange-Methode bezeichnen (siehe dazu BATHE [9], ZIENKIEWICZ & TAYLOR [99], [100], CRISFIELD [25], [26], BELYTSCHKO ET AL. [11] oder WRIGGERS [97]).

4.2.2 Konsistente Linearisierung

Das Newton-Verfahren liefert eine verbesserte Näherungslösung durch eine Taylorreihenentwicklung der nichtlinearen Gleichung an der Stelle einer schon gegebenen Näherungslösung. Diese Taylorreihenentwicklung entspricht der Linearisierung der Funktionale (4.26) und (4.27) und kann mittels der Richtungsableitung berechnet werden. Wird die Darstellung (1.25) für Rotationstensoren berücksichtigt, dann lauten die zu linearisierenden Funktionale

$$\mathcal{F}_{\mathbf{T}}(\mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\boldsymbol{\omega})), \boldsymbol{\delta} \mathbf{u}, \boldsymbol{\delta} \mathbf{v}) = 0 \quad , \quad (4.41)$$

$$\mathcal{F}_{\mathbf{T}_c}(\mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\boldsymbol{\omega})), \boldsymbol{\delta} \mathbf{u}, \boldsymbol{\delta} \mathbf{v}) = 0 \quad . \quad (4.42)$$

Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, werden (ähnlich wie in den Gleichungen (4.41), (4.42) und (4.26), (4.27)) die gleichen Funktions- oder Funktionalsymbole verwendet, unabhängig davon, ob $\boldsymbol{\omega}$ oder $\exp(\text{Spn}(\boldsymbol{\omega}))$ als Argument angenommen wird. Anstelle des mikropolaren Verschiebungs- und Rotationsfeldes wird der inkrementelle Verschiebungs- und Rotationsvektor $\Delta \mathbf{u}$ bzw. $\Delta \boldsymbol{\omega}$ gesucht. Diese geben die Änderung der Verschiebung und Rotation zwischen alter Gleichgewichtslage \mathcal{R}_t und neuer Gleichgewichtslage $\mathcal{R}_{t+\Delta t}$ an. Größen, die sich auf die alte Gleichgewichtslage \mathcal{R}_t beziehen werden mit dem Index 0 gekennzeichnet und Größen der neuen Gleichgewichtslage $\mathcal{R}_{t+\Delta t}$ mit dem Index 1. Unter Berücksichtigung von (4.39) ergibt sich der inkrementelle mikropolare Verschiebungsvektor zu

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0 \quad (4.43)$$

mit

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{X} \quad , \quad (4.44)$$

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{X} \quad . \quad (4.45)$$

Für die mikropolare Rotation gilt mit den Gleichungen (4.40) und (1.25)

$$\exp(\text{Spn}(\boldsymbol{\omega}_1)) = \exp(\text{Spn}(\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\omega})) \exp(\text{Spn}(\boldsymbol{\omega}_0)) \quad . \quad (4.46)$$

Darin enthalten ist der inkrementelle mikropolare Rotationsvektor $\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\omega}$. Es ergeben sich die Funktionale

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathbf{T}}(\mathbf{u}_1, \exp(\text{Spn}(\boldsymbol{\omega}_1)), \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta}\mathbf{v}) = \\ \mathcal{F}_{\mathbf{T}}(\mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\omega})) \exp(\text{Spn}(\boldsymbol{\omega}_0)), \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta}\mathbf{v}) = 0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathbf{T}_e}(\mathbf{u}_1, \exp(\text{Spn}(\boldsymbol{\omega}_1)), \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta}\mathbf{v}) = \\ \mathcal{F}_{\mathbf{T}_e}(\mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\omega})) \exp(\text{Spn}(\boldsymbol{\omega}_0)), \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta}\mathbf{v}) = 0 \quad . \end{aligned} \quad (4.48)$$

Die Linearisierung erfolgt für die auf die aktuelle Konfiguration bezogenen Funktionale. Verwendet werden dabei die Größen

$$\mathbf{u}^{(i+1)} = \mathbf{u}^{(i)} + \boldsymbol{\Delta}^{(i)}\mathbf{u} \quad , \quad (4.49)$$

$$\bar{\mathbf{R}}^{(i+1)} = \exp(\text{Spn}(\boldsymbol{\Delta}^{(i)}\boldsymbol{\omega}))\bar{\mathbf{R}}^{(i)} \quad , \quad \bar{\mathbf{R}}^{(i)} = \exp(\text{Spn}(\boldsymbol{\omega}^{(i)})) \quad . \quad (4.50)$$

Im Nachfolgenden stellt $X^{(i)}$ die Größe X in der Konfiguration $\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}$ dar.

Zuerst wird das Funktional (4.41) bzw. (4.47) betrachtet. Die Iterationsvorschrift für das Newton-Verfahren lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathbf{T}}(\mathbf{u}^{(i)} + \boldsymbol{\Delta}^{(i)}\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\boldsymbol{\Delta}^{(i)}\boldsymbol{\omega}))\bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \boldsymbol{\delta}\mathbf{v}) = \\ \mathcal{F}_{\mathbf{T}}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda\boldsymbol{\Delta}^{(i)}\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\mu\boldsymbol{\Delta}^{(i)}\boldsymbol{\omega}))\bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \boldsymbol{\delta}\mathbf{v}) \Big|_{\lambda=\mu=1} = \\ \mathcal{F}_{\mathbf{T}}(\mathbf{u}^{(i)}, \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \boldsymbol{\delta}\mathbf{v}) + \frac{\partial\mathcal{F}_{\mathbf{T}}(\dots)}{\partial\lambda} \Big|_{\lambda=\mu=0} + \frac{\partial\mathcal{F}_{\mathbf{T}}(\dots)}{\partial\mu} \Big|_{\lambda=\mu=0} = 0 \end{aligned} \quad (4.51)$$

bzw.

$$\frac{\partial\mathcal{F}_{\mathbf{T}}(\dots)}{\partial\lambda} \Big|_{\lambda=\mu=0} + \frac{\partial\mathcal{F}_{\mathbf{T}}(\dots)}{\partial\mu} \Big|_{\lambda=\mu=0} = -\mathcal{F}_{\mathbf{T}}(\mathbf{u}^{(i)}, \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \boldsymbol{\delta}\mathbf{v}) \quad . \quad (4.52)$$

Die rechte Seite stellt das sogenannte Residuum dar, während die linke Seite in mehreren Schritten bestimmt werden muss. Die ersten beiden Integrale in (4.22) sind äußere Lasten und werden,

da sie als unabhängig von der Verschiebung und der Rotation angenommen werden, bei der Linearisierung nicht weiter betrachtet. Folglich muss der Ausdruck

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mathbf{T}} &:= \int_{\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}} \mathbf{T} \left(\mathbf{u}^{(i)} + \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right) \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{\mathbf{u}^{(i)} + \Delta^{(i)} \mathbf{u}} dv_{t+\Delta t}^{(i)} \\ &= \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{S} \left(\mathbf{u}^{(i)} + \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right) \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{F}^{-1} \Big|_{\mathbf{u}^{(i)} + \Delta^{(i)} \mathbf{u}} dV_t\end{aligned}\quad (4.53)$$

linearisiert werden. Dabei wird die Notation dV_t bzw. $dv_{t+\Delta t}^{(i)}$ für Volumenelemente in der Konfiguration \mathcal{R}_t bzw. $\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}$ benutzt. Das Ergebnis der Linearisierung lautet:

$$\begin{aligned}\Delta \mathcal{F}_{\mathbf{T}} &:= \frac{d}{d\lambda} \mathcal{F}_{\mathbf{T}}(\dots) \Big|_{\lambda=\mu=0} + \frac{d}{d\mu} \mathcal{F}_{\mathbf{T}}(\dots) \Big|_{\lambda=\mu=0} \\ &= \int_{\mathcal{R}_t} \left(\frac{d}{d\lambda} \mathbf{S} \left(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\mu \Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right) \Big|_{\lambda=\mu=0} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} (\mathbf{F}^{(i)})^{-1} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{S}^{(i)} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \frac{d}{d\lambda} \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}) \Big|_{\lambda=0} \right. \\ &\quad \left. + \frac{d}{d\mu} \mathbf{S} \left(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\mu \Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right) \Big|_{\lambda=\mu=0} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} (\mathbf{F}^{(i)})^{-1} \right) dV_t.\end{aligned}\quad (4.54)$$

Mit den Beziehungen

$$\frac{d}{d\lambda} \mathbf{F}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}) \Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial \Delta^{(i)} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \mathbf{F}^{(i)}, \quad (4.55)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}) \Big|_{\lambda=0} = -(\mathbf{F}^{(i)})^{-1} \frac{\partial \Delta^{(i)} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}, \quad (4.56)$$

$$\frac{d}{d\mu} \left(\exp(\text{Spn}(\mu \Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right) \Big|_{\mu=0} = \text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega}) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \quad (4.57)$$

$$\frac{d}{d\mu} \left(\frac{\partial(\exp(\text{Spn}(\mu \Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)})}{\partial \mathbf{X}} \right) \Big|_{\mu=0} = \frac{\partial(\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega}))}{\partial \mathbf{X}} \bar{\mathbf{R}}^{(i)} + \text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega}) \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}^{(i)}}{\partial \mathbf{X}} \quad (4.58)$$

kann die Linearisierung der Spannung durchgeführt werden. Aus der Darstellung

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \mathbf{S} \left(\mathbf{u}^{(i)} + \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right) \\ &= \mathbf{S} \left(\mathbf{F}(\mathbf{u}^{(i)} + \Delta^{(i)} \mathbf{u}), \exp(\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \partial(\exp(\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}) / \partial \mathbf{X} \right)\end{aligned}\quad (4.59)$$

folgen die Zwischenergebnisse

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda} \mathbf{S} \left(\mathbf{F}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}), \exp(\text{Spn}(\mu \Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \partial(\exp(\text{Spn}(\mu \Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}) / \partial \mathbf{X} \right) \Big|_{\lambda=\mu=0} &= \\ \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{F}} \Big|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\frac{\partial \Delta^{(i)} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \mathbf{F}^{(i)} \right] &\end{aligned}\quad (4.60)$$

und

$$\begin{aligned}
 & \left. \frac{d}{d\mu} \mathbf{S} \left(\mathbf{F}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}), \exp(\text{Spn}(\mu \Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \partial(\exp(\text{Spn}(\mu \Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}) / \partial \mathbf{X} \right) \right|_{\lambda=\mu=0} = \\
 & \left. \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \bar{\mathbf{R}}} \right|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega}) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right] + \\
 & \left. \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial(\partial \bar{\mathbf{R}} / \partial \mathbf{X})} \right|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\frac{\partial(\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega}))}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \mathbf{F}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^{(i)} + \text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega}) \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}^{(i)}}{\partial \mathbf{X}} \right] . \quad (4.61)
 \end{aligned}$$

Insgesamt lautet das Ergebnis der Linearisierung

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathcal{F}_{\mathbf{T}} &= \int_{\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}} \left(\left. \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{F}} \right|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\frac{\partial \Delta^{(i)} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \mathbf{F}^{(i)} \right] \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \right. \\
 & - \mathbf{S}^{(i)} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \frac{\partial \Delta^{(i)} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \\
 & + \left. \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \bar{\mathbf{R}}} \right|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega}) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right] \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \\
 & + \left. \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial(\partial \bar{\mathbf{R}} / \partial \mathbf{X})} \right|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\frac{\partial(\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega}))}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \mathbf{F}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right] \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \\
 & + \left. \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial(\partial \bar{\mathbf{R}} / \partial \mathbf{X})} \right|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega}) \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}^{(i)}}{\partial \mathbf{X}} \right] \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \right) \frac{dv_{t+\Delta t}^{(i)}}{\det \mathbf{F}^{(i)}} . \quad (4.62)
 \end{aligned}$$

Als Nächstes wird das Funktional (4.42) bzw. (4.48) betrachtet. In diesem Fall lautet die Iterationsvorschrift

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{F}_{\mathbf{T}_c}(\mathbf{u}^{(i)} + \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \delta \mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \delta \mathbf{v}) = \\
 & \mathcal{F}_{\mathbf{T}_c}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \delta \mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\mu \Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \delta \mathbf{v}) \Big|_{\lambda=\mu=1} = \\
 & \mathcal{F}_{\mathbf{T}_c}(\mathbf{u}^{(i)}, \delta \mathbf{u}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \delta \mathbf{v}) + \left. \frac{\partial \mathcal{F}_{\mathbf{T}_c}(\dots)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\mu=0} + \left. \frac{\partial \mathcal{F}_{\mathbf{T}_c}(\dots)}{\partial \mu} \right|_{\lambda=\mu=0} = 0 \quad (4.63)
 \end{aligned}$$

bzw.

$$\left. \frac{\partial \mathcal{F}_{\mathbf{T}_c}(\dots)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\mu=0} + \left. \frac{\partial \mathcal{F}_{\mathbf{T}_c}(\dots)}{\partial \mu} \right|_{\lambda=\mu=0} = -\mathcal{F}_{\mathbf{T}_c}(\mathbf{u}^{(i)}, \delta \mathbf{u}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \delta \mathbf{v}) . \quad (4.64)$$

Die rechte Seite stellt das sogenannte Residuum dar, während die linke Seite wiederum bestimmt werden muss. Das Verfahren entspricht jenem bei (4.41) bzw. (4.47). Die ersten beiden Integrale in (4.23) repräsentieren äußere Lasten und werden, da sie als unabhängig von der Verschiebung

und der Rotation angenommen werden, nicht weiter betrachtet. Folglich muss der Ausdruck

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{\mathbf{T}_c} &:= \int_{\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}} \left\{ \mathbf{T}_c \left(\mathbf{u}^{(i)} + \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right) \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{\mathbf{u}^{(i)} + \Delta^{(i)} \mathbf{u}} \right. \\
 &\quad \left. + \mathbf{T} \left(\mathbf{u}^{(i)} + \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right) \cdot \delta \mathbf{V} \right\} dV_{t+\Delta t}^{(i)} \\
 &= \int_{\mathcal{R}_t} \left\{ \mathbf{S}_c \left(\mathbf{u}^{(i)} + \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} \right. \\
 &\quad \left. + \mathbf{S} \left(\mathbf{u}^{(i)} + \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right) \cdot \delta \mathbf{V} \right\} dV_t
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

linearisiert werden. Dies liefert

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathcal{F}_{\mathbf{T}_c} &:= \frac{d}{d\lambda} \mathcal{F}_{\mathbf{T}_c}(\dots) \Big|_{\lambda=\mu=0} + \frac{d}{d\mu} \mathcal{F}_{\mathbf{T}_c}(\dots) \Big|_{\lambda=\mu=0} \\
 &= \int_{\mathcal{R}_t} \left\{ \frac{d}{d\lambda} \mathbf{S}_c \left(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\mu \Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right) \Big|_{\lambda=\mu=0} \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{d}{d\mu} \mathbf{S}_c \left(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\mu \Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right) \Big|_{\lambda=\mu=0} \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} \right. \\
 &\quad \left. + \mathbf{S}_c^{(i)} \frac{d}{d\mu} \exp(\text{Spn}(\mu \Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \Big|_{\lambda=\mu=0} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{d}{d\lambda} \mathbf{S} \left(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\mu \Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right) \Big|_{\lambda=\mu=0} \cdot \delta \mathbf{V} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{d}{d\mu} \mathbf{S} \left(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\mu \Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right) \Big|_{\lambda=\mu=0} \cdot \delta \mathbf{V} \right\} dV_t \quad .
 \end{aligned} \tag{4.66}$$

Aus der Darstellung

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_c &= \mathbf{S}_c \left(\mathbf{u}^{(i)} + \Delta^{(i)} \mathbf{u}, \exp(\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right) \\
 &= \mathbf{S}_c \left(\mathbf{F}(\mathbf{u}^{(i)} + \Delta^{(i)} \mathbf{u}), \exp(\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \partial(\exp(\text{Spn}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}) / \partial \mathbf{X} \right)
 \end{aligned} \tag{4.67}$$

folgen die Zwischenergebnisse

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\lambda} \mathbf{S}_c \left(\mathbf{F}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \Delta^{(i)} \mathbf{u}), \exp(\text{Spn}(\mu \Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \partial(\exp(\text{Spn}(\mu \Delta^{(i)} \boldsymbol{\omega})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}) / \partial \mathbf{X} \right) \Big|_{\lambda=\mu=0} &= \\
 \frac{\partial \mathbf{S}_c}{\partial \mathbf{F}} \Big|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\frac{\partial \Delta^{(i)} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}^{(i)}} \mathbf{F}^{(i)} \right] &
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

und

$$\begin{aligned}
 & \left. \frac{d}{d\mu} \mathbf{S}_c \left(\mathbf{F}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda \boldsymbol{\Delta}^{(i)} \mathbf{u}), \exp(\text{Spn}(\mu \boldsymbol{\Delta}^{(i)} \boldsymbol{\omega})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}, \partial(\exp(\text{Spn}(\mu \boldsymbol{\Delta}^{(i)} \boldsymbol{\omega})) \bar{\mathbf{R}}^{(i)}) / \partial \mathbf{X} \right) \right|_{\lambda=\mu=0} = \\
 & \left. \frac{\partial \mathbf{S}_c}{\partial \bar{\mathbf{R}}} \right|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\text{Spn}(\boldsymbol{\Delta}^{(i)} \boldsymbol{\omega}) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right] + \\
 & \left. \frac{\partial \mathbf{S}_c}{\partial(\partial \bar{\mathbf{R}} / \partial \mathbf{X})} \right|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\frac{\partial(\text{Spn}(\boldsymbol{\Delta}^{(i)} \boldsymbol{\omega}))}{\partial \mathbf{X}} \bar{\mathbf{R}}^{(i)} + \text{Spn}(\boldsymbol{\Delta}^{(i)} \boldsymbol{\omega}) \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}^{(i)}}{\partial \mathbf{X}} \right] . \quad (4.69)
 \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich demnach

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathcal{F}_{\mathbf{T}_c} = & \int_{\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}} \left(\left. \frac{\partial \mathbf{S}_c}{\partial \mathbf{F}} \right|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\frac{\partial \boldsymbol{\Delta}^{(i)} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \mathbf{F}^{(i)} \right] \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \bar{\mathbf{V}}^{(i)} \right. \\
 & + \left. \left. \frac{\partial \mathbf{S}_c}{\partial \bar{\mathbf{R}}} \right|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\text{Spn}(\boldsymbol{\Delta}^{(i)} \boldsymbol{\omega}) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right] \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \bar{\mathbf{V}}^{(i)} \right. \\
 & + \left. \left. \frac{\partial \mathbf{S}_c}{\partial(\partial \bar{\mathbf{R}} / \partial \mathbf{X})} \right|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\frac{\partial(\text{Spn}(\boldsymbol{\Delta}^{(i)} \boldsymbol{\omega}))}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \mathbf{F}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right] \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \bar{\mathbf{V}}^{(i)} \right. \\
 & + \left. \left. \frac{\partial \mathbf{S}_c}{\partial(\partial \bar{\mathbf{R}} / \partial \mathbf{X})} \right|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\text{Spn}(\boldsymbol{\Delta}^{(i)} \boldsymbol{\omega}) \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}^{(i)}}{\partial \mathbf{X}} \right] \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \bar{\mathbf{V}}^{(i)} \right. \\
 & - \left. \mathbf{S}_c^{(i)} \text{Spn}(\boldsymbol{\Delta}^{(i)} \boldsymbol{\omega}) \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \bar{\mathbf{V}}^{(i)} \right. \\
 & + \left. \left. \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{F}} \right|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\frac{\partial \boldsymbol{\Delta}^{(i)} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \mathbf{F}^{(i)} \right] \cdot \delta \mathbf{V} \right. \\
 & + \left. \left. \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \bar{\mathbf{R}}} \right|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\text{Spn}(\boldsymbol{\Delta}^{(i)} \boldsymbol{\omega}) \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right] \cdot \delta \mathbf{V} \right. \\
 & + \left. \left. \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial(\partial \bar{\mathbf{R}} / \partial \mathbf{X})} \right|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\frac{\partial(\text{Spn}(\boldsymbol{\Delta}^{(i)} \boldsymbol{\omega}))}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \mathbf{F}^{(i)} \bar{\mathbf{R}}^{(i)} \right] \cdot \delta \mathbf{V} \right. \\
 & \left. + \left. \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial(\partial \bar{\mathbf{R}} / \partial \mathbf{X})} \right|_{\mathbf{F}^{(i)}, \bar{\mathbf{R}}^{(i)}} \left[\text{Spn}(\boldsymbol{\Delta}^{(i)} \boldsymbol{\omega}) \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}^{(i)}}{\partial \mathbf{X}} \right] \cdot \delta \mathbf{V} \right) \frac{dv_{t+\Delta t}^{(i)}}{\det \mathbf{F}^{(i)}} . \quad (4.70)
 \end{aligned}$$

4.2.3 Integration der Materialgleichungen – Operator-Split-Verfahren

Das Materialmodell kann mit einem Operator-Split-Verfahren nach SIMO ET AL. [79], [78] integriert werden. Das gesamte Differentialgleichungssystem wird in mehrere Anteile, sogenannte Operatoren, unterteilt. Die Anfangsbedingungen für das gesamte System sind dann die Anfangsbedingungen für den ersten Operator. Die Lösungen dieses Operators dienen als Anfangsbedingungen für den zweiten Operator und so weiter. Die Lösung des letzten Operators ist schließlich die Lösung des gesamten Differentialgleichungssystems. Diese Vorgehensweise wurde bereits im Rahmen der klassischen Plastizität mit Erfolg angewandt. Repräsentativ seien hier

die Arbeiten HARTMANN [49], JANSOHN [55], LÄMMER [64] und DIEGELE ET AL. [30] erwähnt. Sie verwenden einen Formalismus, der der hier beschriebenen Theorie sehr nahe steht.

In der vorliegenden Arbeit wird ein zweifacher Operator-Split durchgeführt. Im ersten Operator (elastischer Prädiktor) werden die rein elastischen Anteile der Materialgleichung berücksichtigt, während im zweiten Operator (plastischer Korrektor) die inelastischen Anteile integriert werden. Dies hat den Vorteil, dass nach dem ersten Operator mit Hilfe der Fließbedingung überprüft werden kann, ob eine rein elastische oder eine elastisch-inelastische Belastung vorliegt. Der zweite Operator muss nur im letzteren Fall ausgewertet werden.

Zur Notation: Größen im ersten Operator werden mit einem links hoch gestellten Index I , Größen im zweiten Operator mit einem entsprechenden Index II gekennzeichnet. Außerdem werden Anfangsbedingungen zur Zeit t mit einem rechts tief gestellten Index 0, die Größen am Ende des Inkrements $t + \Delta t$ mit 1 versehen.

Operator I – Elastischer Prädiktor

In Operator I werden nur die Teile in den Differentialgleichungen betrachtet, die unabhängig von \dot{s} sind. So sind z. B. gemäß Gleichung (3.133), (3.135) für ϵ_p, \mathbf{K}_p die Differentialgleichungen

$$\dot{\epsilon}_p = \Omega \epsilon_p + \epsilon_p \mathbf{L} \quad , \quad (4.71)$$

$$\dot{\mathbf{K}}_p = \Omega \mathbf{K}_p - \mathbf{K}_p \Omega^T \quad (4.72)$$

zu lösen (vgl. auch TSAKMAKIS & WILLUWEIT [92], [93]). Mit Hilfe der Beziehungen (4.39) und (4.40) lassen sich ϵ_p, \mathbf{K}_p bestimmen zu

$${}^I \epsilon_{p1} = (\Delta \bar{\mathbf{R}}) \epsilon_{p0} (\Delta \mathbf{F})^{-1} \quad , \quad (4.73)$$

$${}^I \mathbf{K}_{p1} = (\Delta \bar{\mathbf{R}}) \mathbf{K}_{p0} (\Delta \bar{\mathbf{R}})^T \quad . \quad (4.74)$$

Daraus folgt für den elastischen Anteil des mikropolaren Verzerrungstensors

$${}^I \epsilon_{e1} = \epsilon_1 - {}^I \epsilon_{p1} \quad (4.75)$$

und für den elastischen Anteil des Krümmungstensors

$${}^I \mathbf{K}_{e1} = \mathbf{K}_1 - {}^I \mathbf{K}_{p1} \quad . \quad (4.76)$$

Die mikropolare Spannung ${}^I \mathbf{S}_1$ und die Momentenspannung ${}^I \mathbf{S}_{c1}$ können dann aus den Elastizitätsgesetzen (3.114) und (3.116) berechnet werden. Um die Fließbedingung (3.126) zu überprüfen, muss ξ und ξ_c bestimmt werden. Analog lassen sich \mathbf{Y} und \mathbf{Y}_c bestimmen aus

$${}^I \overset{\diamond}{\mathbf{Y}} = \mathbf{0} \quad , \quad (4.77)$$

$${}^I \overset{\diamond}{\mathbf{Y}}_c = \mathbf{0} \quad . \quad (4.78)$$

Die Lösung lautet

$${}^I \mathbf{Y}_1 = (\Delta \bar{\mathbf{R}}) {}^I \mathbf{Y}_0 (\Delta \mathbf{F})^{-1} \quad , \quad (4.79)$$

$${}^I \mathbf{Y}_{c1} = (\Delta \bar{\mathbf{R}}) {}^I \mathbf{Y}_{c0} (\Delta \bar{\mathbf{R}})^T \quad . \quad (4.80)$$

Die plastische Bogenlänge s wird in Operator I nicht verändert, so dass

$${}^I s_1 = s_0 \quad . \quad (4.81)$$

Damit stehen alle Größen zur Verfügung, um die Fließbedingung zu überprüfen und im Falle plastischer Belastung die Lösung in Operator II zu korrigieren. Ist die Belastung rein elastisch, so ist die Lösung aus Operator I die Lösung des gesamten Problems. Es gilt für die Spannung und Momentenspannung

$$\mathbf{S}_1 = {}^I \mathbf{S}_1 \quad , \quad \mathbf{S}_{c1} = {}^I \mathbf{S}_{c1} \quad , \quad (4.82)$$

für den Verzerrungs- und Krümmungstensor

$$\boldsymbol{\epsilon}_1 = {}^I \boldsymbol{\epsilon}_{e1} + {}^I \boldsymbol{\epsilon}_{p1} \quad , \quad \mathbf{K}_1 = {}^I \mathbf{K}_{e1} + {}^I \mathbf{K}_{p1} \quad (4.83)$$

und für die Verfestigungsgrößen

$$\mathbf{Z}_1 = {}^I \mathbf{Z}_1 \quad , \quad (4.84)$$

$$\boldsymbol{\xi}_1 = {}^I \boldsymbol{\xi}_1 \quad , \quad \boldsymbol{\xi}_{c1} = {}^I \boldsymbol{\xi}_{c1} \quad , \quad (4.85)$$

$$k_1 = {}^I k_1 \quad , \quad s_1 = {}^I s_1 \quad . \quad (4.86)$$

Operator II – Plastischer Korrektur

In Operator II sind die rechten Seiten der Differentialgleichungen proportional zu \dot{s} . Im Fall plastischer Belastung wird in Operator II das Anfangswertproblem numerisch mit einem impliziten Euler-Verfahren integriert. Das Algebra-differentialgleichungssystem ist für das mikropolare Materialmodell bereits angegeben. Mit den im ersten Operator bestimmten Lösungen liegen die Anfangsbedingungen für den zweiten Operator vor. So gilt für die Spannung und Momentenspannung

$${}^{II} \mathbf{S}_0 = {}^I \mathbf{S}_1 \quad , \quad {}^{II} \mathbf{S}_{c0} = {}^I \mathbf{S}_{c1} \quad , \quad (4.87)$$

für die Verzerrungs- und Krümmungsmaße

$${}^{II} \boldsymbol{\epsilon}_{p0} = {}^I \boldsymbol{\epsilon}_{p1} \quad , \quad {}^{II} \mathbf{K}_{p0} = {}^I \mathbf{K}_{p1} \quad , \quad (4.88)$$

$${}^{II} \boldsymbol{\epsilon}_{e0} = {}^I \boldsymbol{\epsilon}_{e1} \quad , \quad {}^{II} \mathbf{K}_{e0} = {}^I \mathbf{K}_{e1} \quad (4.89)$$

und für die Verfestigungsvariablen

$${}^{II} \mathbf{Z}_0 = {}^I \mathbf{Z}_1 \quad , \quad (4.90)$$

$${}^{II} \mathbf{Y}_0 = {}^I \mathbf{Y}_1 \quad , \quad {}^{II} \mathbf{Y}_{c0} = {}^I \mathbf{Y}_{c1} \quad , \quad (4.91)$$

$${}^{II} \boldsymbol{\xi}_0 = {}^I \boldsymbol{\xi}_1 \quad , \quad {}^{II} \boldsymbol{\xi}_{c0} = {}^I \boldsymbol{\xi}_{c1} \quad , \quad (4.92)$$

$${}^{II} k_0 = {}^I k_1 \quad , \quad {}^{II} s_0 = {}^I s_1 \quad . \quad (4.93)$$

Bei inelastischer Belastung muss das Differentialgleichungssystem für ${}^{II}\boldsymbol{\epsilon}_{p1}$, ${}^{II}\mathbf{K}_{p1}$, ${}^{II}\mathbf{Y}_1$, ${}^{II}\mathbf{Y}_{c1}$, ${}^{II}k_1$, ${}^{II}s_1$ zusammen mit den algebraischen Beziehungen für ${}^{II}\mathbf{S}_1$, ${}^{II}\mathbf{S}_{c1}$, ${}^{II}\boldsymbol{\epsilon}_{e1}$, ${}^{II}\mathbf{K}_{e1}$, ${}^{II}\mathbf{Z}_1$, ${}^{II}\boldsymbol{\xi}_1$, ${}^{II}\boldsymbol{\xi}_{c1}$ gelöst werden. Für die gesamte mikropolare Verzerrung und Krümmung ist dann die Lösung durch ${}^{II}\boldsymbol{\epsilon}_1 = {}^{II}\boldsymbol{\epsilon}_0$, ${}^{II}\mathbf{K}_1 = {}^{II}\mathbf{K}_0$ gegeben. Die Anwendung des impliziten Euler-Algorithmus liefert zunächst ein nichtlineares Gleichungssystem, das mittels des Newton-Verfahrens gelöst werden kann. Die nichtlinearen Gleichungen werden aus den Beziehungen für die Verzerrung und die Krümmung

$${}^{II}\boldsymbol{\epsilon}_{p1} - {}^{II}\boldsymbol{\epsilon}_{p0} - \Delta t {}^{II}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{p1} = \mathbf{0} \quad , \quad (4.94)$$

$${}^{II}\mathbf{K}_{p1} - {}^{II}\mathbf{K}_{p0} - \Delta t {}^{II}\dot{\mathbf{K}}_{p1} = \mathbf{0} \quad (4.95)$$

und für die Verfestigungsvariablen

$${}^{II}\mathbf{Y}_1 - {}^{II}\mathbf{Y}_0 - \Delta t {}^{II}\dot{\mathbf{Y}}_1 = \mathbf{0} \quad , \quad (4.96)$$

$${}^{II}\mathbf{Y}_{c1} - {}^{II}\mathbf{Y}_{c0} - \Delta t {}^{II}\dot{\mathbf{Y}}_{c1} = \mathbf{0} \quad , \quad (4.97)$$

$${}^{II}k_1 - {}^{II}k_0 - \Delta t \frac{\dot{s}}{\varphi} (\gamma^{(is)} - \beta^{(is)} ({}^{II}k_1 - r_k)) = 0 \quad , \quad (4.98)$$

$${}^{II}s_1 - {}^{II}s_0 - \Delta t \dot{s} = 0 \quad (4.99)$$

hergeleitet. Die Lösung für das komplette Differentialgleichungssystem ist somit gegeben durch

$$\mathbf{S}_1 = {}^{II}\mathbf{S}_1 \quad , \quad \mathbf{S}_{c1} = {}^{II}\mathbf{S}_{c1} \quad , \quad (4.100)$$

$$\mathbf{Z}_1 = {}^{II}\mathbf{Z}_1 \quad , \quad (4.101)$$

$$\mathbf{Y}_1 = {}^{II}\mathbf{Y}_1 \quad , \quad \mathbf{Y}_{c1} = {}^{II}\mathbf{Y}_{c1} \quad , \quad (4.102)$$

$$\boldsymbol{\xi}_1 = {}^{II}\boldsymbol{\xi}_1 \quad , \quad \boldsymbol{\xi}_{c1} = {}^{II}\boldsymbol{\xi}_{c1} \quad , \quad (4.103)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{p1} = {}^{II}\boldsymbol{\epsilon}_{p1} \quad , \quad \mathbf{K}_{p1} = {}^{II}\mathbf{K}_{p1} \quad , \quad (4.104)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{e1} = {}^{II}\boldsymbol{\epsilon}_{e1} \quad , \quad \mathbf{K}_{e1} = {}^{II}\mathbf{K}_{e1} \quad , \quad (4.105)$$

$$k_1 = {}^{II}k_1 \quad , \quad s_1 = {}^{II}s_1 \quad . \quad (4.106)$$

4.2.4 Bestimmung der konsistenten Tangente

Die analytische Bestimmung der partiellen Ableitungen

$$\mathcal{D}_1 = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{F}} \quad , \quad (4.107)$$

$$\mathcal{D}_2 = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \bar{\mathbf{R}}} \quad , \quad (4.108)$$

$$\mathcal{D}_3 = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial (\partial \bar{\mathbf{R}} / \partial \mathbf{X})} \quad , \quad (4.109)$$

$$\mathcal{D}_4 = \frac{\partial \mathbf{S}_c}{\partial \mathbf{F}} \quad , \quad (4.110)$$

$$\mathcal{D}_5 = \frac{\partial \mathbf{S}_c}{\partial \bar{\mathbf{R}}} \quad , \quad (4.111)$$

$$\mathcal{D}_6 = \frac{\partial \mathbf{S}_c}{\partial(\partial \bar{\mathbf{R}}/\partial \mathbf{X})} \quad (4.112)$$

ist sehr aufwendig und fehleranfällig. Außerdem ist sie sehr unflexibel, was Änderungen an den Materialgleichungen betrifft. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit die Ableitung mit einem numerischen Verfahren ermittelt, wie es z. B. in MIEHE [72] vorgestellt wurde. Die numerische Näherung der partiellen Ableitungen \mathcal{D}_1 bis \mathcal{D}_6 wird durch den vorderen Differenzenquotienten ermittelt.

Zur Bildung des Differenzenquotient bei einer skalaren Funktion g , die von einer skalaren Größe x abhängt, wird zum Funktionsargument eine kleine Zahl χ hinzugezählt, d. h. es wird ein kleines Stück in die sogenannte Abstiegsrichtung der Funktion gegangen und dort der Funktionswert bestimmt. Die Ableitung ergibt sich dann aus

$$\frac{\partial g}{\partial x} \approx \frac{g(x + \chi) - g(x)}{\chi} \quad \text{mit} \quad \chi \ll 1 \quad . \quad (4.113)$$

Wird bei einem Tensor zweiter Stufe $\mathbf{G}(\mathbf{A})$ als Funktion eines weiteren Tensors zweiter Stufe \mathbf{A} die partielle Ableitung $\partial \mathbf{G}/\partial \mathbf{A}$ gesucht, so gilt analog

$$\frac{\partial G_{ij}}{\partial A_{mn}} \approx \frac{\check{G}_{ij}(\check{A}_{kl}^{(mn)}) - G_{ij}(A_{kl})}{\chi} \quad , \quad (4.114)$$

mit dem gestörten Tensor

$$\check{\mathbf{A}}^{(mn)} = \mathbf{A} + \chi(\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n) \quad . \quad (4.115)$$

Es wird also jede Komponente von \mathbf{A} gestört und aus diesem $\check{\mathbf{A}}^{(mn)}$ das zugehörige $\check{\mathbf{G}}$ berechnet. Somit ergeben sich für jedes $\check{\mathbf{A}}^{(mn)}$ neun Komponenten von $\check{\mathbf{G}}$, also insgesamt die 81 Komponenten des entstehenden Tensors vierter Stufe. Bei Tensoren dritter Stufe ist die Vorgehensweise analog. Sei ein Tensor zweiter Stufe $\mathbf{G}(\mathcal{A})$ als Funktion eines Tensors dritter Stufe \mathcal{A} gegeben und sei die partielle Ableitung $\partial \mathbf{G}/\partial \mathcal{A}$ gesucht, so gilt

$$\frac{\partial G_{ij}}{\partial \mathcal{A}_{mnk}} \approx \frac{\check{G}_{ij}(\check{\mathcal{A}}_{pqr}^{(mnk)}) - G_{ij}(\mathcal{A}_{pqr})}{\chi} \quad , \quad (4.116)$$

mit dem gestörten Tensor

$$\check{\mathcal{A}}^{(mnk)} = \mathcal{A} + \chi(\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_k) \quad . \quad (4.117)$$

Es wird folglich jede Komponente von \mathcal{A} gestört und aus diesem $\check{\mathcal{A}}^{(mnk)}$ das zugehörige $\check{\mathbf{G}}$ berechnet. Für jedes $\check{\mathcal{A}}^{(mnk)}$ ergeben sich 81 Komponenten von $\check{\mathbf{G}}$, also insgesamt die 243 Komponenten des entstehenden Tensors fünfter Stufe.

Die numerischen Näherungen lauten in diesem Fall

$$(\mathcal{D}_1)_{ijmn} \approx \frac{\check{S}_{ij}(\check{F}_{pq}^{(mn)}) - S_{ij}(F_{pq})}{\chi} \quad , \quad (4.118)$$

$$(\mathcal{D}_2)_{ijmn} \approx \frac{\check{S}_{ij}(\check{\bar{R}}_{pq}^{(mn)}) - S_{ij}(\bar{R}_{pq})}{\chi} \quad , \quad (4.119)$$

$$(\mathcal{D}_3)_{ijmnk} \approx \frac{\check{S}_{ij}(\check{\bar{R}}_{pq,r}^{(mnk)}) - S_{ij}(\bar{R}_{pq,r})}{\chi} \quad , \quad (4.120)$$

$$(\mathcal{D}_4)_{ijmn} \approx \frac{\check{S}_{cij}(\check{F}_{pq}^{(mn)}) - S_{cij}(F_{pq})}{\chi} \quad , \quad (4.121)$$

$$(\mathcal{D}_5)_{ijmn} \approx \frac{\check{S}_{cij}(\check{\bar{R}}_{pq}^{(mn)}) - S_{cij}(\bar{R}_{pq})}{\chi} \quad , \quad (4.122)$$

$$(\mathcal{D}_6)_{ijmnk} \approx \frac{\check{S}_{cij}(\check{\bar{R}}_{pq,r}^{(mnk)}) - S_{cij}(\bar{R}_{pq,r})}{\chi} \quad , \quad (4.123)$$

wobei χ sehr klein sein muss. Bei der Wahl des Inkrements χ in Abstiegsrichtung muss ein Kompromiss eingegangen werden. Wird es zu groß gewählt, ist die errechnete Tangente zu ungenau. Bei zu kleinem χ (in der Größenordnung der Rechnergenauigkeit), können entscheidende Nachkommastellen verloren gehen, was zu falschen Ergebnissen bei der Tangentenberechnung führt. Ein üblicher Wert für χ ist ein Wert mit der halben Anzahl von Nachkommastellen der Maschinengenauigkeit, also

$$\chi = \sqrt{\text{Maschinengenauigkeit}} \quad . \quad (4.124)$$

Ein Nachteil der numerischen Bestimmung der Tangenten ist der größere numerische Aufwand. Neben dem ersten Durchlaufen des Spannungs-Momentenspannungs-Algorithmus zur Ermittlung des gewichteten Cauchyschen Spannungs- und Momentenspannungstensors, muss dieser Programmteil nun zusätzlich mehrmals ausgeführt werden. Der numerische aufwändigste und damit rechenzeitintensivste Teil der Berechnung ist die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems im zweiten Operator. Die Effizienz der Tangentenbestimmung kann dadurch gesteigert werden, dass als Startwert des Newton-Verfahrens die Lösung, die aus der Spannungs-Momentenspannungs-Berechnung bekannt ist, verwendet wird. Da sich die jeweils neu bestimmten Verzerrungs- und Krümmungsmaße nur minimal von den ursprünglichen Maßen unterscheiden, weicht auch die berechnete Spannung und Momentenspannung nur minimal von der ursprünglichen Spannung und Momentenspannung ab. Es sind deshalb nur sehr wenige Iterationen im Newton-Verfahren erforderlich, um diese neue Spannung und Momentenspannung zu ermitteln.

4.3 Implementierung in ABAQUS

Das mikropolare (Visko-)Plastizitätsmodell wurde in das kommerzielle Finite-Elemente-Programm ABAQUS implementiert. Aus der Theorie des mikropolaren Kontinuums folgt, dass neben

der Impulsbilanzgleichung eine weitere Gleichgewichtsbedingung (die Drehimpulsbilanz) erfüllt sein muss. Um dieser Tatsache Rechnung zu tragen, müssen hierfür eigens definierte Elemente programmiert werden. Durch die Benutzerschnittstelle UEL (siehe ABAQUS Handbuch [2]) ist diese Möglichkeit gegeben. Mittels dieser Schnittstelle ist es möglich, eine entsprechende Elementsteifigkeitsmatrix und den dazugehörigen Kraftvektor zu bestimmen. Neben diesen beiden Größen können noch weitere Variablen bzw. Steuergrößen übergeben werden. ABAQUS führt anschließend die Assemblierung des Gesamtgleichungssystems durch und berechnet dessen Lösung. ABAQUS dient demnach lediglich als ein stabiler Gleichungslöser.

Zur Berechnung allgemeiner dreidimensionaler Randwertprobleme wurde ein 8-Knoten-Volumenelement programmiert. Um die lineare Interpolation für die Verschiebung und die Rotation zu berücksichtigen, besitzt jeder Knoten eines Elementes drei Verschiebungs- und drei Rotationsfreiheitsgrade. Zusätzlich wird jedem Knoten eine lokale Knotennummer von 1 bis 8 zugewiesen. Die Größe der quadratischen Elementsteifigkeitsmatrix und des Elementkraftvektors ist dadurch festgelegt. Die Knotenverschiebungen und -rotationen eines Elementes werden in einem Lösungsvektor

$$\bar{\mathbf{d}} := \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{d}}^u \\ \bar{\mathbf{d}}^\omega \end{pmatrix} \quad (4.125)$$

angeordnet. Die Elementsteifigkeitsmatrix $\bar{\mathbf{K}}$ kann durch

$$\bar{\mathbf{K}} := \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{K}}^{uu} & \bar{\mathbf{K}}^{u\omega} \\ \bar{\mathbf{K}}^{\omega u} & \bar{\mathbf{K}}^{\omega\omega} \end{pmatrix} \quad (4.126)$$

kompakt ausgedrückt werden. Der Elementkraftvektor $\bar{\mathbf{F}}$ lässt sich darstellen als

$$\bar{\mathbf{F}} := \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{F}}^u \\ \bar{\mathbf{F}}^\omega \end{pmatrix} . \quad (4.127)$$

Die Ausdrücke der einzelnen Einträge in der Elementsteifigkeitsmatrix und im Elementkraftvektor werden aus den bereits hergeleiteten Beziehungen (4.62) und (4.70) gebildet. Die Elementsteifigkeitsmatrix und der Elementkraftvektor werden im ersten Durchlauf für jedes Element des gesamten Finite-Elemente-Modells initialisiert. Daraus bestimmt ABAQUS den Gesamtlösungsvektor \mathbf{d} , aus dem in den darauffolgenden Aufrufen der Elemente die Verzerrungen, Krümmungen, Spannungen und Momentenspannungen an den Integrationspunkten mit den bereits abgeleiteten Beziehungen berechnet wird.

5 Finite-Elemente-Beispiele

In diesem Kapitel wird gezeigt, dass die in dieser Arbeit entwickelte mikropolare Plastizitätstheorie in der Lage ist, Längenskaleneffekte im Materialverhalten wiederzugeben. Dazu wird die Torsion eines Vollzylinders diskutiert. Die berechneten Ergebnisse werden qualitativ mit den experimentellen Resultaten von FLECK ET AL. [39] verglichen. Weitere Eigenschaften der konstitutiven Theorie werden anhand einer gelochten Platte unter Zugbeanspruchung veranschaulicht.

5.1 Wahl der Materialparameter

Die Bestimmung geeigneter Materialparameter für mikropolare Stoffgesetze ist ein schwieriges Vorhaben und stellt ein nicht gelöstes Problem in der experimentellen Kontinuumsmechanik dar. Bisher wurden nur für wenige Fälle der mikropolaren Elastizität die Materialparameter bestimmt (siehe z. B. LAKES [58]). Dies geschieht in der Regel entweder über die Beobachtung von Größeneffekten oder über die Messung der Ausbreitung von Transversalwellen und die Ermittlung von Dispersionsrelationen, die sich mittels klassischer Modelle nicht beschreiben lassen (siehe ERINGEN [35]). Eine Bestimmung der Materialparameter für das hier angenommene mikropolare Plastizitätsmodell mit isotroper und kinematischer Verfestigung würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Die Materialparameter der nachfolgenden Berechnungen stellen deshalb lediglich angenommene Werte dar. Vergleiche zu experimentellen Daten können demzufolge nur qualitative Bedeutung haben. Der Einfachheit halber beziehen sich alle durchgeführten Rechnungen auf die geschwindigkeitsunabhängige Plastizität.

Die Materialparameter für das Elastizitätsgesetz und die Fließfunktion sind in Tabelle 5.1 angegeben.

$\mu = 46000 \text{ MPa}$	$\alpha_1 = 0,75$
$\nu = 0,3$	$\alpha_2 = 0,25$
$\alpha = 3000 \text{ MPa}$	$\alpha_3 = 10000 \text{ mm}^{-2}$
$\beta = 0 \text{ N}$	$\alpha_4 = 10000 \text{ mm}^{-2}$
$\gamma = 0,01 \text{ N}$	
$\delta = 0 \text{ N}$	$k_0 = 70 \text{ MPa}$

Tabelle 5.1: Werte der Materialparameter für das Elastizitätsgesetz, die Fließfunktion und die Fließgrenze.

Für die Verfestigung werden drei Fälle untersucht:

1. Reine isotrope Verfestigung.

Materialparameter:

$$\beta^{(is)} = 9, \gamma^{(is)} = 2400 \text{ MPa}.$$

2. Reine kinematische Verfestigung.

Materialparameter:

$$c_1 = 0 \text{ MPa}, c_2 = 800 \text{ MPa}, c_3 = 100 \text{ MPa}, c_4 = 0 \text{ N}, c_5 = 0,0001 \text{ N}, c_6 = 0 \text{ N}, \\ b_1 = b_2 = 0,002 \text{ MPa}^{-1}, b_{c1} = b_{c2} = 0,002 \text{ mm/N}.$$

3. Kombination aus isotroper und kinematischer Verfestigung.

Materialparameter:

$$\beta^{(is)} = 16, \gamma^{(is)} = 700 \text{ MPa},$$

$$c_1 = 0 \text{ MPa}, c_2 = 600 \text{ MPa}, c_3 = 80 \text{ MPa}, c_4 = 0 \text{ N}, c_5 = 0,0001 \text{ N}, c_6 = 0 \text{ N}, \\ b_1 = b_2 = 0,0025 \text{ MPa}^{-1}, b_{c1} = b_{c2} = 0,0025 \text{ mm/N}.$$

Abbildung 5.1 zeigt den Verlauf der Spannung über die Dehnung für eindimensionale monotone Zugbeanspruchungen. Erkennbar ist, dass die Kennlinien für die drei Verfestigungsmodelle in einem großen Bereich nahezu zusammenfallen.

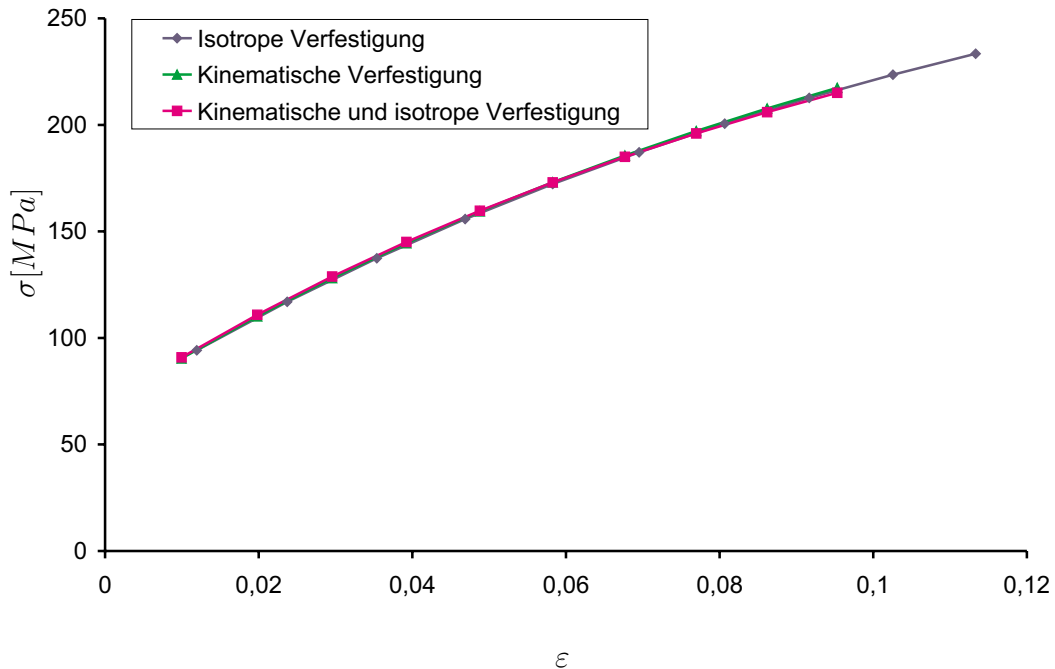


Abbildung 5.1: Verlauf der eindimensionalen Spannung $\sigma (= T_{11})$ als Funktion der logarithmischen Dehnung $\epsilon = \ln \frac{l}{l_0}$ für eine Zugprobe (l_0 : Ausgangslänge der Probe, $l = l(t)$: Länge der Probe zur Zeit t).

Im Großen und Ganzen entsprechen die Spannungs-Dehnungskennlinien in Abbildung 5.1 denjenigen für Kupferdrähte in Abbildung 5.2. Letztere sind von FLECK ET AL. [39] experimentell gemessen worden. Die kleinen Abweichungen in den Verläufen in Abbildung 5.2 können von den Unterschieden in der Mikrostruktur der verschiedenen Proben herrühren und werden von FLECK ET AL. [39] als vernachlässigbar klein angesehen.

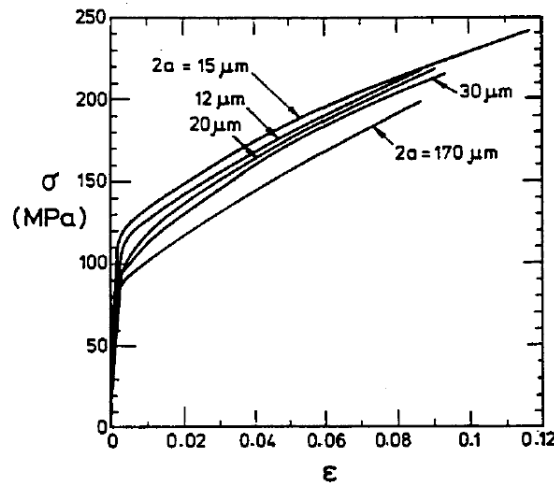


Abbildung 5.2: Eindimensionale (Cauchy-)Spannung σ über die logarithmische Dehnung ε für Kupfer-Drähte mit unterschiedlichen Durchmessern (a : Drahtradius). Nach FLECK ET AL. [39].

Bei der Untersuchung der gelochten Platte wurde bei den numerischen Berechnungen neben dem oben bereits erwähnten Satz von Materialparametern für eine Kombination aus isotroper und kinematischer Verfestigung ein weiterer Satz von Materialparametern benutzt.

5.2 Torsion eines Kreiszyllinders

Im ersten Beispiel wird eine kreiszylindrische Probe unter Torsionsbeanspruchung betrachtet. An ihrem unteren Ende ist die Probe fest eingespannt, während an ihrem oberen Ende eine Verdrehung mit vorgegebenem Drehwinkel erfolgt. Die Länge der Probe bleibt während der Deformation konstant. Dies entspricht dem Fall der einfachen Torsion. Ein solches Experiment für Kupferdrähte mit Durchmessern wie in Abbildung 5.2 wurde von FLECK ET AL. [39] durchgeführt. Abbildung 5.3 zeigt den maßgeblichen Einfluss der Geometrie der Probe (genauer des Durchmessers) auf das mechanische Verhalten. In dieser Abbildung wurde auf der vertikalen Achse das durch die dritte Potenz des Außenradius der Probe r_a dividierte Torsionsmoment M aufgetragen. Auf der horizontalen Achse wurde die Scherung γ_a am äußeren Rand aufgetragen. Letztere ist durch $\gamma_a = \vartheta r_a$ definiert, wobei $\vartheta = \Delta\Phi/l_0$ die Drillung darstellt ($\Delta\Phi$: Winkeländerung am oberen Ende der Probe, l_0 : Probenausgangslänge). Aus Abbildung 5.3 ist ersichtlich, dass das Verhältnis M/r_a^3 bei konstantem γ_a mit abnehmendem Radius zunimmt,

d. h. die kleineren Proben verhalten sich steifer im Vergleich zu den großen. Allerdings werden die Unterschiede mit zunehmendem Radius kleiner. Wäre das Materialverhalten unabhängig von inneren Längen, so müssten die verschiedenen Graphen in Abbildung 5.3 im Rahmen der experimentellen Genauigkeit zusammenfallen.

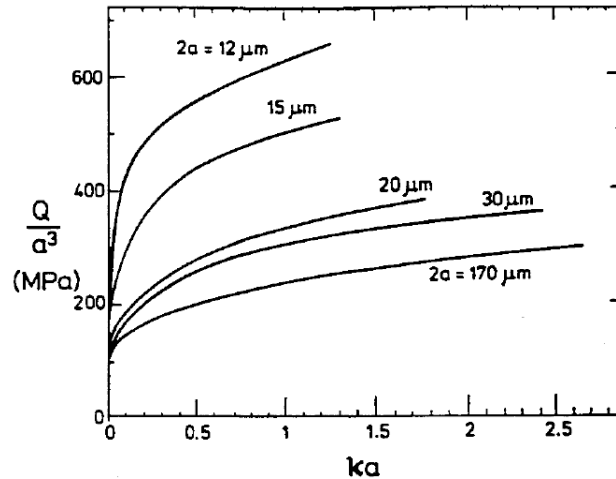


Abbildung 5.3: Das Verhältnis $M/r_a^3 = Q/a^3$ als Funktion der Scherung $\gamma_a = ka$ für Torsionsproben aus Kupfer mit unterschiedlichen Durchmessern. Nach FLECK ET AL. [39]. (Die Bezeichnungen Q , a , k aus FLECK ET AL. [39] entsprechen in dieser Arbeit M , r_a , ϑ .)

Als Nächstes werden diesen experimentellen Ergebnissen Finite-Elemente-Berechnungen auf Grundlage der mikropolaren Plastizitätstheorie gegenübergestellt. Die gewählten Zylindergeometrien können Tabelle 5.2 entnommen werden. Die Vernetzung erfolgt mit 480 8-Knoten-

	Durchmesser [μm]	Höhe [μm]
Probe 1	12	6
Probe 2	15	7,5
Probe 3	20	10
Probe 4	30	15
Probe 5	170	85

Tabelle 5.2: Gewählte Probengeometrien bei der Torsion.

Volumenelementen (siehe Abbildung 5.4). Als Randbedingung wird das untere Ende der Probe festgehalten, während das obere Ende mit einem vorgegebenen Winkel gedreht wird (Verschiebungsrandbedingungen für das Makrokontinuum). Die innere Rotation sowohl am unteren als auch am oberen Ende der Probe wird der äußeren gleichgesetzt. An der Mantelfläche wird sowohl der Spannungs- als auch der Momentenspannungsvektor gleich Null gesetzt (Krastrandbedingungen). Die Berechnung des Torsionsmomentes M aus den Finite-Elemente-Ergebnissen

erfolgt auf der Basis der Formel

$$M = \int_0^{r_a} T^{\langle\varphi z\rangle} 2\pi r^2 dr + \int_0^{r_a} T_c^{\langle zz\rangle} 2\pi r dr \quad . \quad (5.1)$$

Das erste Integral aus (5.1) entspricht dem Beitrag der klassischen Spannung, während das zweite Integral den Anteil aus der Momentenspannung liefert. Die jeweiligen Spannungskomponenten stellen physikalische Komponenten dar. Die numerischen Voraussagen der Theorie für reine isotrope Verfestigung, reine kinematische Verfestigung sowie kombinierte isotrope und kinematische Verfestigung können jeweils den Abbildungen 5.5, 5.6 und 5.8 entnommen werden.

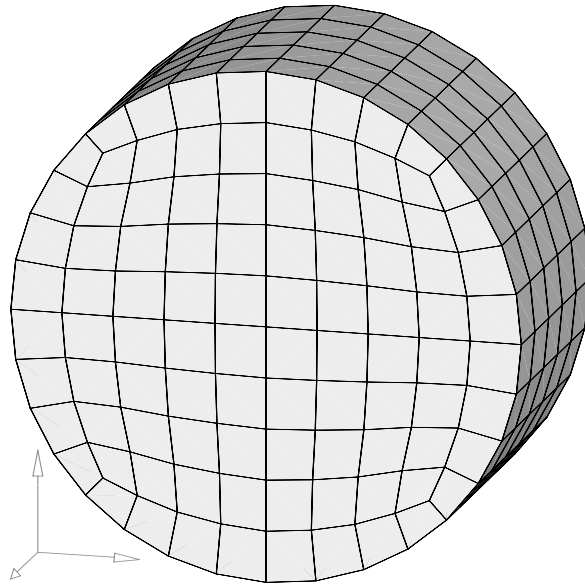


Abbildung 5.4: Finite-Elemente-Modell bei der Torsion.

In den Abbildungen 5.5 und 5.6 sind jeweils die γ_a-M/r_a^3 -Ergebnisse für die kleinste und für die größte Probe aufgetragen. Werden Abbildungen 5.5 und 5.3 miteinander verglichen, so ist ersichtlich, dass reine isotrope Verfestigung das reale Materialverhalten bei Torsion überschätzt. Da die Verfestigungsparameter $\beta^{(is)}$ und $\gamma^{(is)}$ schon anhand der eindimensionalen Zugbeanspruchung festgelegt wurden, ist diese Überschätzung eine prinzipielle Eigenschaft der isotropen Verfestigung. Aus dem Vergleich der Abbildungen 5.6 und 5.3 kann gefolgert werden, dass reine kinematische Verfestigung besser in der Lage ist, das Materialverhalten für die Torsion zu beschreiben. Diese Einschätzung wird durch folgende Überlegung unterstützt. Für die eindimensionale Zugbeanspruchung sind nur die Verfestigungsparameter b_1, b_2, c_1, c_2, c_3 zuständig. Da die Krümmungstensoren bei dieser homogenen Deformation verschwinden, spielen die Materialparameter $b_{c1}, b_{c2}, c_4, c_5, c_6$ keine Rolle. Es ist deshalb zu erwarten, dass eine geeignete Anpassung

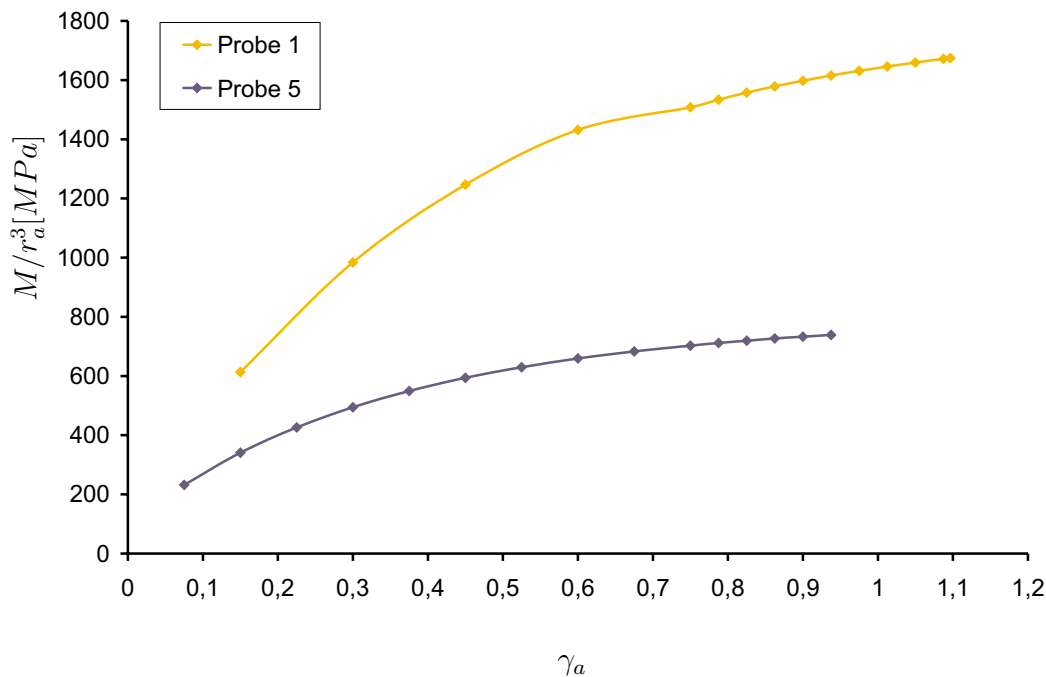


Abbildung 5.5: Modellvoraussagen für reine isotrope Verfestigung während der Torsionsbeanspruchung.

dieser Verfestigungsparameter zu verbesserten Resultaten im Vergleich zum Experiment führt. Anders formuliert weisen diese Überlegungen darauf hin, dass kinematische Verfestigung auch bei rein monotonen Belastungen für das Materialverhalten wichtig ist. Dieses Erkenntnis steht im Gegensatz zu der klassischen Plastizitätstheorie, bei der die Art der Verfestigung (isotrop oder kinematisch) bei rein monotonen Belastungen unbedeutend ist. Mikroskopisch könnte dieses Verhalten wie folgt erklärt werden. Nach FLECK ET AL. [39] besitzen die Kupferdrähte nach einer Wärmebehandlung Korngrößen im Bereich von 5 bis 25 μm . Für die polykristallinen Proben bedeutet dies, dass mehrere Körner im Querschnitt in gestreckter Form vorhanden sind. Es gibt folglich Körner, die an die Oberfläche angrenzen mit sehr kleinen Abmessungen quer zu der Drahtrichtung. Bedingt durch diese geometrischen Zwangsbedingungen werden Versetzungsschleifen statt kreisförmig (wie in makroskopischen Materialien) jetzt in gestreckter Form deformiert (siehe Abbildung 5.7). Deshalb findet ein Aufstauen von Versetzungen an Korngrenzen (kinematische Verfestigung) viel intensiver statt als das Blockieren der Bewegung von Versetzungen durch Hindernisse (isotrope Verfestigung). Diese Situation ist ähnlich der Deformation von dünnen Schichten (vgl. z. B. ARZT [6], BADER ET AL. [7] und BAKER ET AL. [8]). Es sei angemerkt, dass für die größte Probe ($2r_a = 170\mu\text{m}$) für die Theorie mit rein kinematischer Verfestigung die γ_a - M/r_a^3 -Kennlinien Abweichungen vom experimentellen Verhalten aufweisen. Die Kennlinie für die größte Probe in Abbildung 5.6 erreicht sehr schnell ein Maximum und beginnt dann abzufallen, während die entsprechende Kennlinie in Abbildung 5.3 monoton steigend bleibt. Zu klären, ob dieser Effekt eine prinzipielle Eigenschaft der kinematischen Verfestigung ist oder das Resultat der ausgewählten Materialparameter für die Momentenspannungen, muss weiteren Parameterstudien vorbehalten bleiben.

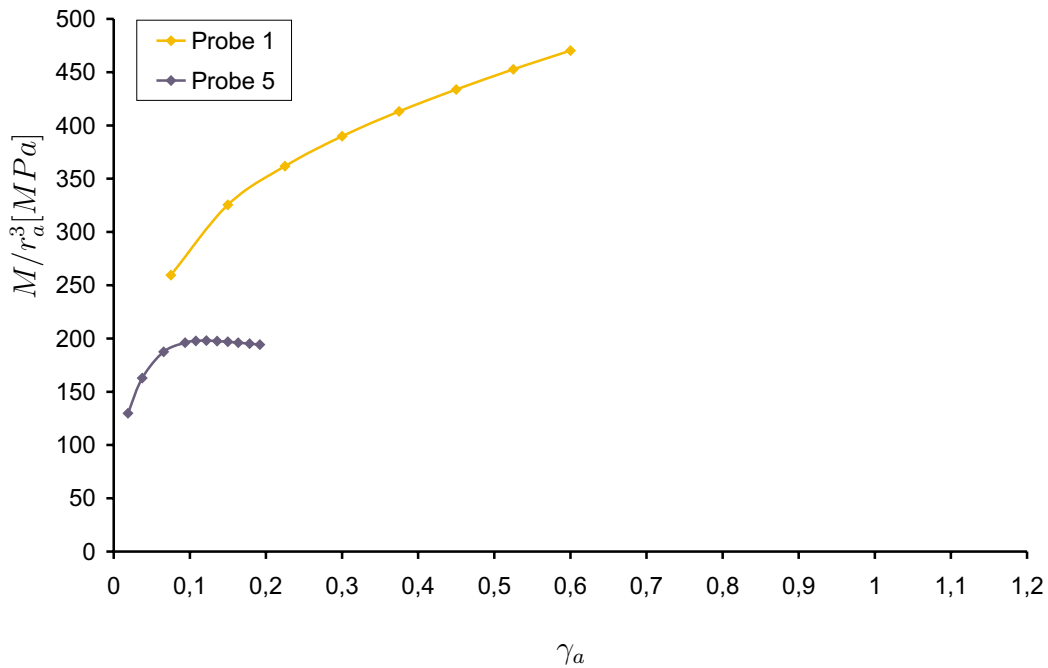


Abbildung 5.6: Modellvoraussagen für reine kinematische Verfestigung während der Torsionsbeanspruchung.

Abbildung 5.8 zeigt für die angenommenen Verfestigungsparameter, dass eine Kombination aus isotroper und kinematischer Verfestigung durchaus in der Lage ist, die experimentell beobachteten Tendenzen im Materialverhalten für Torsion gut wiederzugeben. Natürlich können die theoretischen Voraussagen verbessert werden, indem alle Materialparameter durch etablierte Optimierungsalgorithmen ermittelt werden. Augenfällig in diesen Ergebnissen ist die Überlappung der Kennlinien für $2r_a = 30\mu\text{m}$ und $2r_a = 170\mu\text{m}$ für kleine Scherungen γ_a . Weitere Rechnungen, die hier nicht explizit aufgeführt werden, zeigen, dass diese Überlappung auf die kinematische Verfestigung zurückzuführen ist. Die experimentellen Resultate in Abbildung 5.3 lassen erkennen, dass solche Überlappungen durchaus möglich sind. Allerdings kommen sie nur bei sehr kleinen Scherungen vor. Ob die vorgestellte Theorie in der Lage ist, in Abhängigkeit von den ausgewählten Materialparametern die Überlappung zu verschieben bzw. sie zum

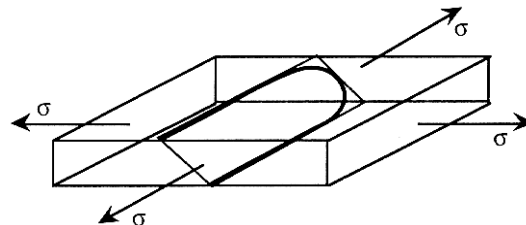


Abbildung 5.7: Bedingt durch die geometrische Zwangsbedingung werden gestreckte Versetzungsschleifen erzeugt (Abbildung aus BAKER ET AL. [8] entnommen).

Verschwinden zu bringen, muss noch untersucht werden.

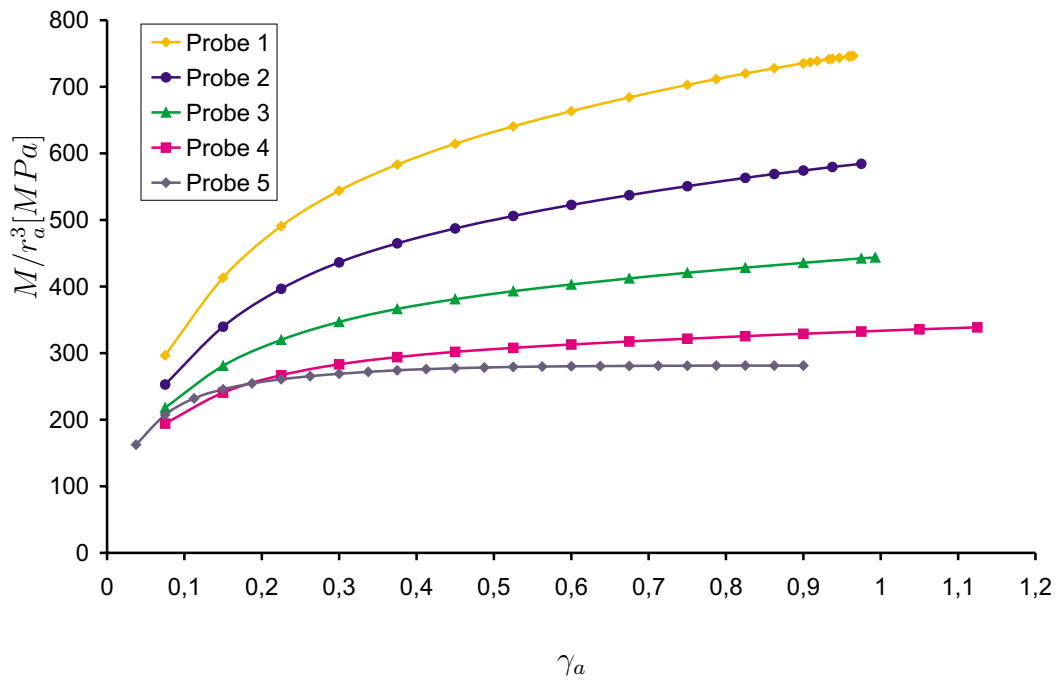


Abbildung 5.8: Modellvoraussagen bei einer Kombination aus isotroper und kinematischer Verfestigung während der Torsionsbeanspruchung.

Die Diskussion des Torsionsbeispiels wird mit einer Bemerkung, die zunächst nur akademischen Charakter hat, abgeschlossen. Aus der klassischen nichtlinearen Kontinuumsmechanik ist bekannt, dass bei einfacher Torsion (d. h. konstant gehaltene Länge der Probe) eine Druckkraft an den Enden der Probe ausgeübt werden muss. Dies stellt einen sogenannten Effekt zweiter Ordnung dar, der für rein elastisches Materialverhalten als Poynting-Effekt bezeichnet wird. Insbesondere ist der Verlauf der axialen Spannung S_{zz} über den entdimensionierten Radius $\bar{r} = r/r_0$ nicht konstant. Für klassische Plastizität mit kleinen elastischen Verzerrungen ist das Auftreten einer axialen Druckspannung bis auf den kleinen Einfluss des Elastizitätsgesetzes das Ergebnis der Existenz kinematischer Verfestigung. Isotrope Verfestigung bewirkt keine Effekte zweiter Ordnung. Im Wesentlichen besitzt dort die axiale Spannung über den Radius einen monotonen Verlauf (vgl. DIEGELE ET AL. [29], HÄUSLER & TSAKMAKIS [54]). In Abbildung 5.9 ist der Verlauf der axialen Spannung S_{zz} über den Radius \bar{r} für die Scherung $\gamma_a = 0,9$ für die mikropolare Plastizitätstheorie mit isotroper und kinematische Verfestigung aufgetragen. Es ist erkennbar, dass die mikropolare Plastizitätstheorie ebenfalls die Existenz einer axialen Druckspannung voraussagt. Allerdings ist jetzt der Verlauf der axialen Spannung über dem Radius nicht mehr monoton. Interessante Effekte sind auch bei den Verläufen der axialen Spannung über dem Radius parametrisiert mit Hilfe der Scherung γ_a sichtbar. Wie aus den Abbildungen 5.10 bis 5.14 erkennbar, können sich diese für kleine Scherungen überschneiden. Dies gilt insbesondere für die kleineren Proben, während sie sich für die große Probe nicht überschneiden. Auch die qualitative Form des S_{zz} - \bar{r} -Verlaufs für festgehaltene Scherung γ_a variiert in Abhängigkeit des Probenradius.

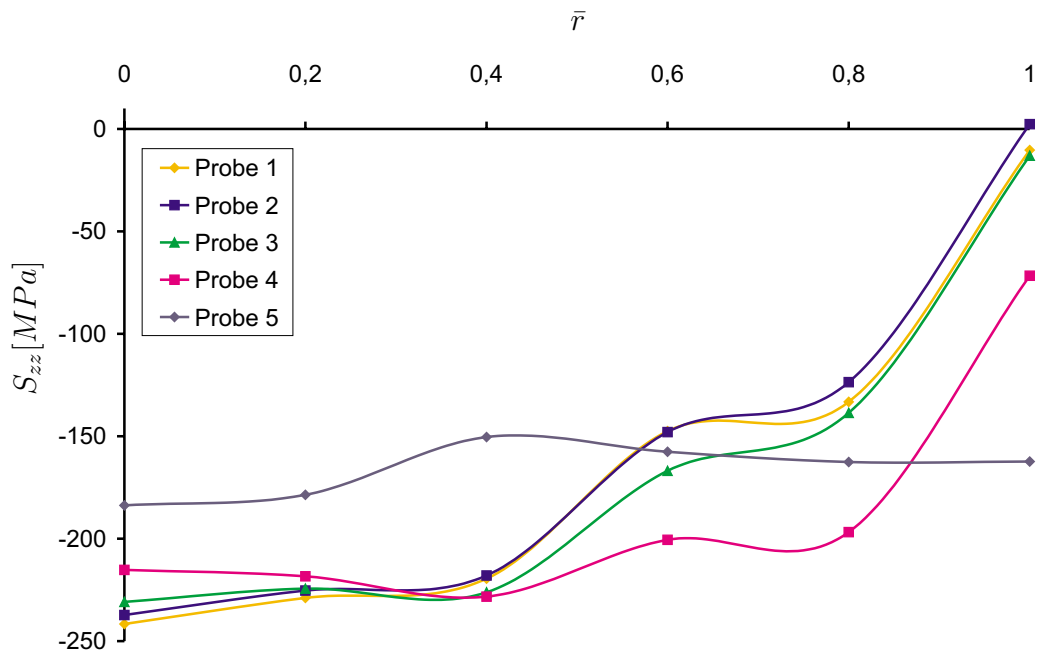


Abbildung 5.9: Verlauf der axialen Spannung S_{zz} über den Radius \bar{r} für die Scherung $\gamma_a = 0,9$.

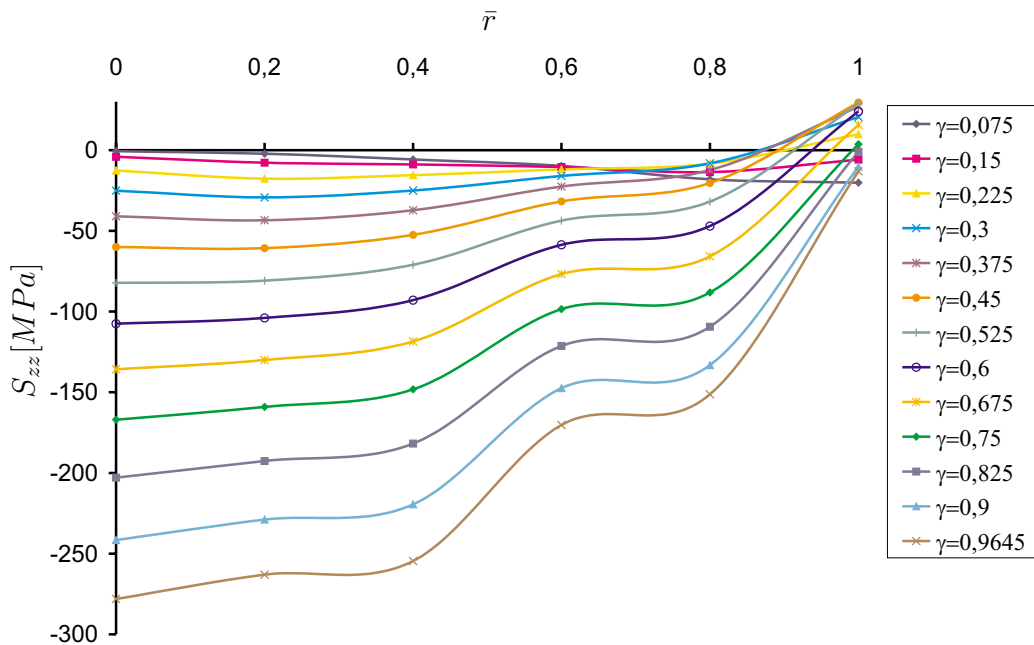


Abbildung 5.10: Verlauf der axialen Spannung S_{zz} über dem Radius \bar{r} parametrisiert mit Hilfe der Scherung γ_a für Probe 1.

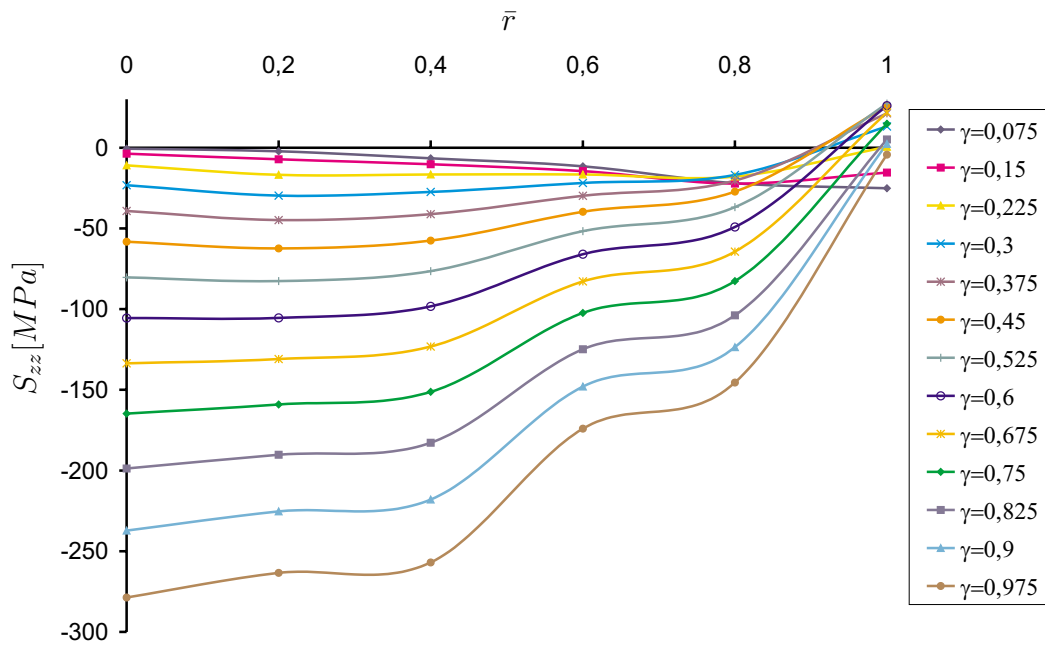


Abbildung 5.11: Verlauf der axialen Spannung S_{zz} über dem Radius \bar{r} parametrisiert mit Hilfe der Scherung γ_a für Probe 2.

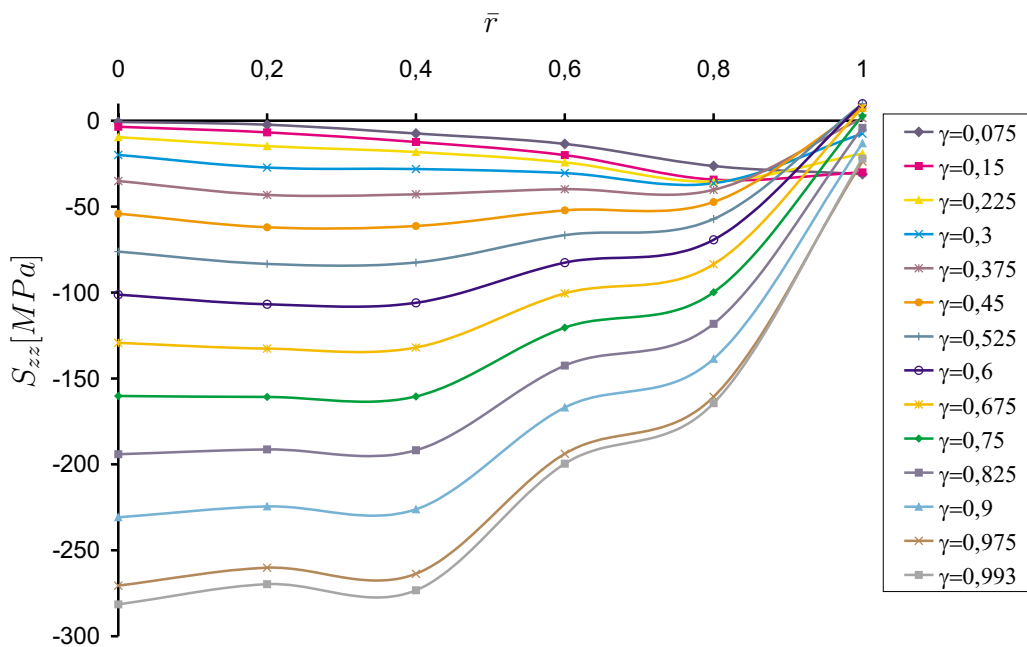


Abbildung 5.12: Verlauf der axialen Spannung S_{zz} über dem Radius \bar{r} parametrisiert mit Hilfe der Scherung γ_a für Probe 3.

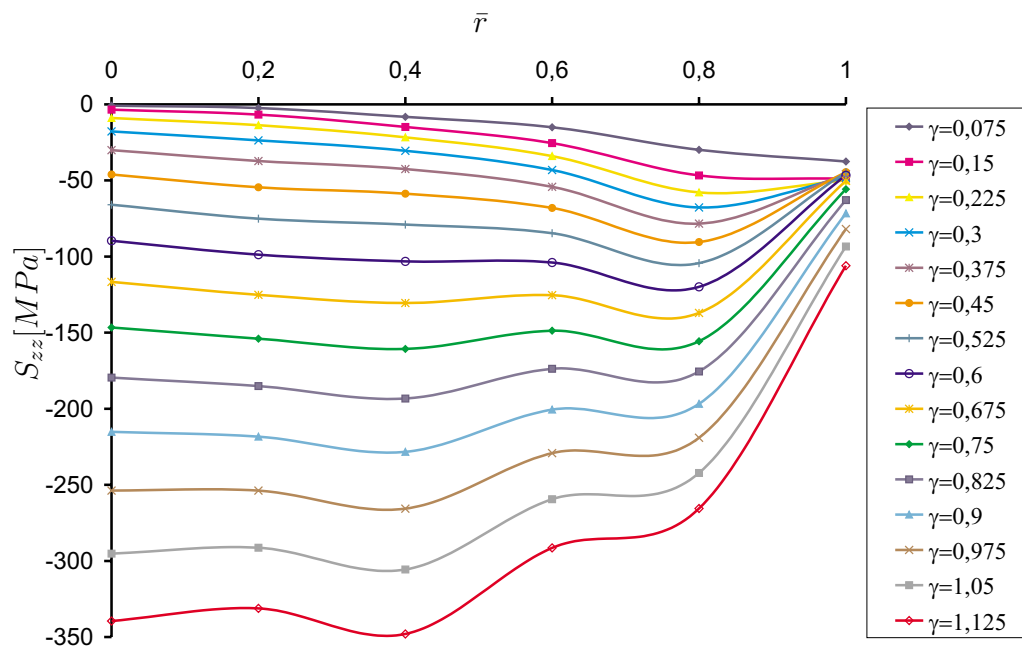


Abbildung 5.13: Verlauf der axialen Spannung S_{zz} über dem Radius \bar{r} parametrisiert mit Hilfe der Scherung γ_a für Probe 4.

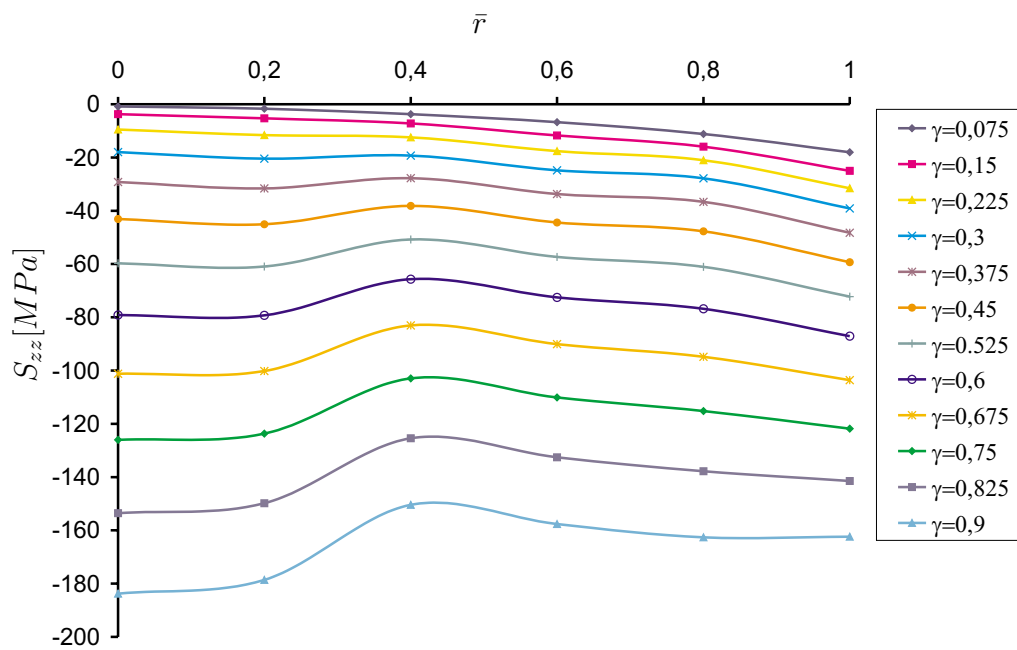


Abbildung 5.14: Verlauf der axialen Spannung S_{zz} über dem Radius \bar{r} parametrisiert mit Hilfe der Scherung γ_a für Probe 5.

5.3 Zug einer gelochten Platte

In diesem Abschnitt wird der Zugversuch einer gelochten Platte diskutiert. Die Daten der Geometrie können Tabelle 5.3 entnommen werden. Die Proben wurden mit 148 8-Knoten-Volumenelementen vernetzt (siehe Abbildung 5.15).

	Länge [mm]	Breite [mm]	Dicke [mm]	Radius des Loches [mm]
Probe 1	0,12	0,05	0,02	0,005
Probe 2	1,2	0,5	0,2	0,05
Probe 3	2,4	1	0,4	0,1
Probe 4	24	10	4	1
Probe 5	120	50	20	5

Tabelle 5.3: Gewählte Probengeometrien beim Zugversuch.

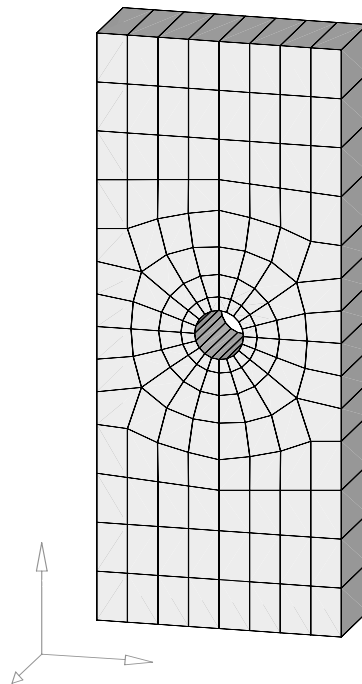


Abbildung 5.15: Finite-Elemente-Modell der gelochten Platte.

Ein wichtiges Maß zur Charakterisierung des Einflusses von inneren Längen ist der Verlauf der Lochaufweitung $w = (r - r_0)/r_0$ über die globale Dehnung $e = (l - l_0)/l_0$ der Platte (r : Radius der Loches, r_0 : Ausgangsradius des Loches, l : Länge der Platte, l_0 : Ausgangslänge der Platte).

Für die Plattengeometrien aus Tabelle 5.3 sind diese Verläufe für zwei Sätze von Materialparametern (siehe Tabelle 5.4 und 5.5) in Abbildung 5.16 und 5.17 dargestellt. Diese Abbildungen verdeutlichen, dass die Materialparameter entscheidenden Einfluss auf das Ergebnis ausüben. Während für den Satz von Materialparametern aus Tabelle 5.4 in Abbildung 5.16 die Aufweitung mit zunehmender Plattengröße für konstante Dehnung e abnimmt, sind die Verhältnisse für den Satz von Materialparametern aus Tabelle 5.5 in Abbildung 5.17 genau umgekehrt.

$\mu = 46000 \text{ MPa}$	$k_0 = 70 \text{ MPa}$	$\alpha_1 = 0,75$	$b_1 = 0,0025 \text{ MPa}^{-1}$	$c_1 = 0 \text{ MPa}$
$\nu = 0,3$		$\alpha_2 = 0,25$	$b_2 = 0,0025 \text{ MPa}^{-1}$	$c_2 = 600 \text{ MPa}$
$\alpha = 3000 \text{ MPa}$	$\beta^{(is)} = 16$	$\alpha_3 = 10000 \text{ mm}^{-2}$	$b_{c1} = 0,0025 \text{ mm/N}$	$c_3 = 80 \text{ MPa}$
$\beta = 0 \text{ N}$	$\gamma^{(is)} = 700 \text{ MPa}$	$\alpha_4 = 10000 \text{ mm}^{-2}$	$b_{c2} = 0,0025 \text{ mm/N}$	$c_4 = 0 \text{ N}$
$\gamma = 0,01 \text{ N}$				$c_5 = 0,0001 \text{ N}$
$\delta = 0 \text{ N}$				$c_6 = 0 \text{ N}$

Tabelle 5.4: Werte der Materialparameter für die Finite-Elemente-Rechnung in Abbildung 5.16.

$\mu = 77000 \text{ MPa}$	$k_0 = 150 \text{ MPa}$	$\alpha_1 = 0,75$	$b_1 = 0,12 \text{ MPa}^{-1}$	$c_1 = 0 \text{ MPa}$
$\nu = 0,3$		$\alpha_2 = 0,25$	$b_2 = 0,06 \text{ MPa}^{-1}$	$c_2 = 1500 \text{ MPa}$
$\alpha = 40000 \text{ MPa}$	$\beta^{(is)} = 20$	$\alpha_3 = 0,28125 \text{ mm}^{-2}$	$b_{c1} = 0,12 \text{ mm/N}$	$c_3 = 800 \text{ MPa}$
$\beta = 80 \text{ N}$	$\gamma^{(is)} = 1000 \text{ MPa}$	$\alpha_4 = 0,09375 \text{ mm}^{-2}$	$b_{c2} = 0,06 \text{ mm/N}$	$c_4 = 0 \text{ N}$
$\gamma = 100 \text{ N}$				$c_5 = 200 \text{ N}$
$\delta = 50 \text{ N}$				$c_6 = 100 \text{ N}$

Tabelle 5.5: Werte der Materialparameter für die Finite-Elemente-Rechnung in Abbildung 5.17.

Eine Verifikation dieser Resultate mit entsprechenden vorhandenen experimentellen Ergebnissen erscheint unklar. In der Tat sind solche Experimente im Rahmen des europäischen Projektes LISSAC (Limit Strains for Severe Accident Conditions - Contract No. FIKS-CT 1999-00012) für die Platten mit den Geometrien aus Tabelle 5.6 durchgeführt worden (siehe AKTAA ET AL. [4]). Das Ergebnis dieser Experimente ist Abbildung 5.18 zu entnehmen. Es ist augenfällig, dass nicht von Anfang an eindeutige Tendenzen zu erkennen sind. Vor allem sind die experimentellen Resultate für den Dehnungsbereich 0,01 bis 0,02 in Frage zu stellen. Auch ein Vergleich der theoretischen Voraussagen mit den experimentellen Daten für große Dehnungen e ist vage. Der Grund dafür liegt darin, dass mit zunehmender Dehnung e sehr schnell eine Einschnürung in der Probenmitte stattfindet. Erfahrungsgemäß sind aber solche Einschnürungen nur mit Berücksichtigung von Schädigungseffekten geeignet zu beschreiben. Dazu ist noch zu bemerken, dass die Probenabmessungen im experimentellen Programm im makroskopischen Bereich liegen. Nach den hier vorliegenden Vorstellungen müssen dann Unterschiede im beobachteten Verhalten nur bei Lokalisierung der Deformation wesentlich werden. Somit können die erwähnten Experimente nicht zur Verifikation der Theorie ohne Schädigungseffekten herangezogen werden. Solche Experimente müssen noch sorgfältig im Mikrobereich durchgeführt werden. Die Abbildungen 5.16 und 5.17 jedoch zeigen, dass die mikropolare Plastizitätstheorie in der Lage ist, Längenabhängigkeiten für sehr kleine Plattenabmessungen vorauszusagen.

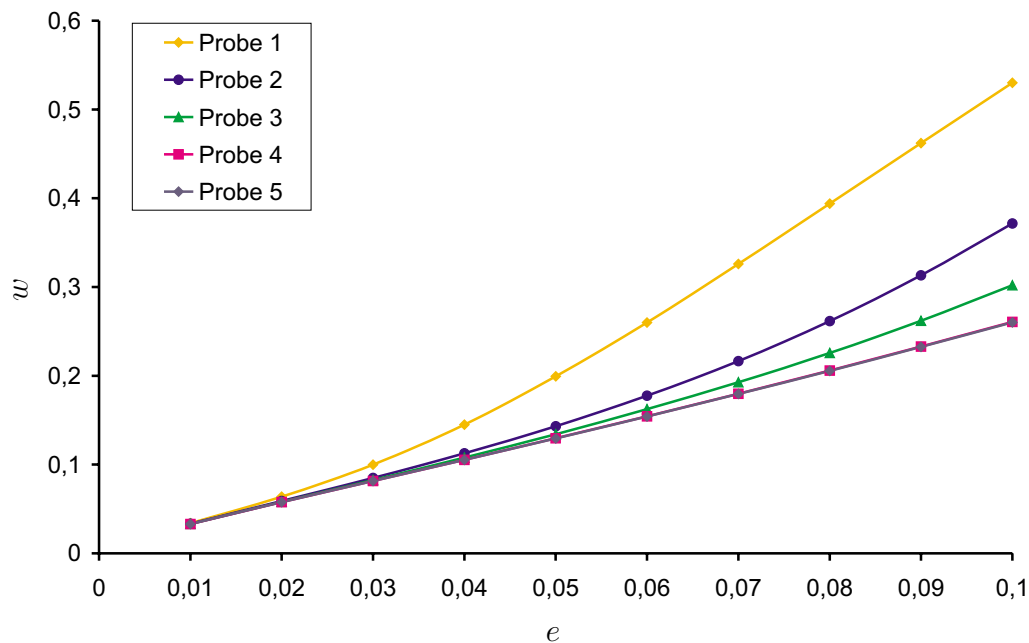


Abbildung 5.16: Verlauf der Lochaufweitung w über die globale Dehnung e für den Satz von Materialparametern aus Tabelle 5.4.

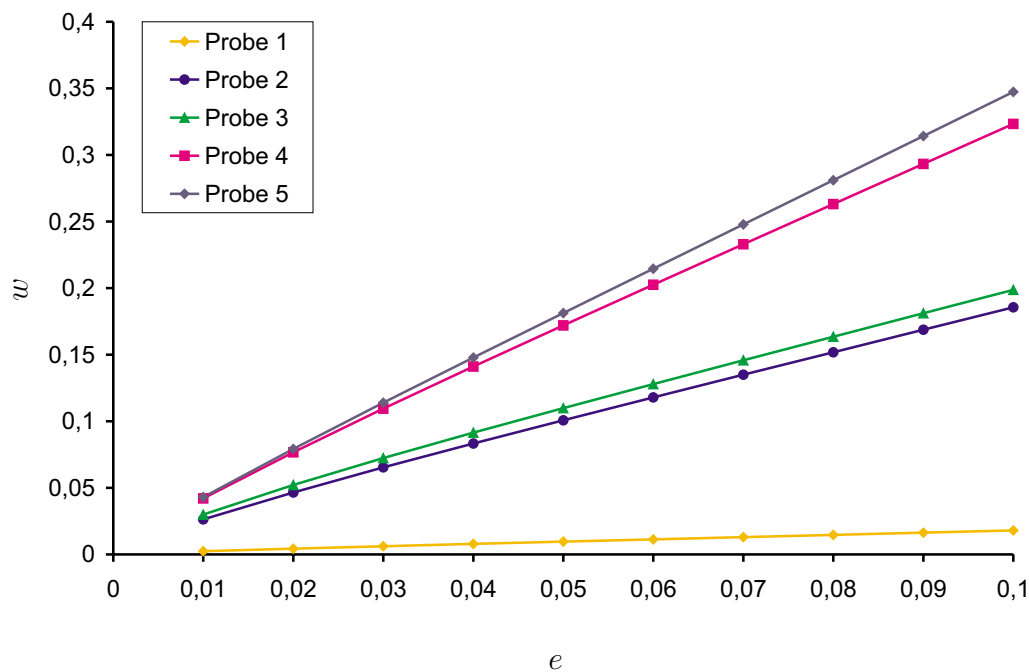


Abbildung 5.17: Verlauf der Lochaufweitung w über die globale Dehnung e für den Satz von Materialparametern aus Tabelle 5.5.

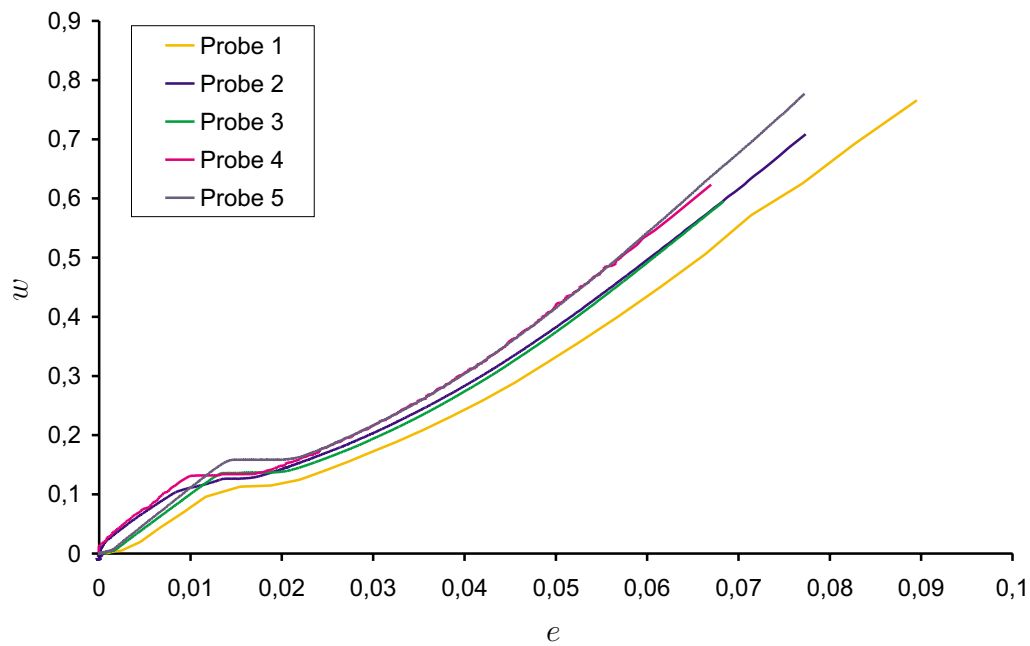


Abbildung 5.18: Experimentell ermittelter Verlauf der Lochaufweitung w über die globale Dehnung e . Nach AKTAA ET AL. [4].

	Länge [mm]	Breite [mm]	Dicke [mm]	Radius des Loches [mm]
Probe 1	24	10	4	2
Probe 2	120	50	20	10
Probe 3	240	100	40	20
Probe 4	480	200	80	40
Probe 5	1200	500	200	100

Tabelle 5.6: Gewählte Probengeometrien beim Experiment. Nach AKTAA ET AL. [4].

6 Zusammenfassung

Die Durchführung von Experimenten im Bereich der Mikrosystemtechnik ist in der Regel sehr aufwendig und vor allem kostspielig. Aus diesem Grund ist der Einsatz von Simulationstools beim Entwurf und der Herstellung von mechanischen Komponenten für Mikrosysteme unentbehrlich geworden. Mit Hilfe numerischer Berechnungen kann die Anzahl der notwendigen Experimente zur endgültigen Auslegung von Bauteilen erheblich reduziert werden. Allerdings setzen numerische Verfahren eine möglichst genaue Modellierung der Materialeigenschaften voraus. Wie bereits erwähnt, gibt es Unterschiede in den an Proben im Mikro- und im Makrobereich beobachteten Materialeigenschaften. Eine Möglichkeit, solche Unterschiede wiederzugeben, ist die Modellierung der konstitutiven Eigenschaften im Sinne eines mikropolaren Kontinuums.

Zu diesem Zweck wurde eine mikropolare Plastizitätstheorie entwickelt, die Effekte infolge kinematischer und isotroper Verfestigung Rechnung trägt. Die Struktur der Theorie basiert auf dem Spannungstensor $\hat{\mathbf{P}}$ und dem Momentenspannungstensor $\hat{\mathbf{P}}_c$. In gewisser Hinsicht hängt der Tensor $\hat{\mathbf{P}}$ mit dem Mandelschen Spannungstensor zusammen, der oft in der klassischen Plastizitätstheorie verwendet wird. Kinematische Verfestigung wird durch die Translationstensoren $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ (back-stress-Tensor) und $\hat{\boldsymbol{\xi}}_c$ (back-couple-stress-Tensor) beschrieben. Während $\hat{\boldsymbol{\xi}}_c$ direkt mit dem thermodynamisch konjugierten inneren Krümmungstensor $\hat{\mathbf{Y}}_c$ zusammenhängt, wird die Beziehung von $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ zu $\hat{\mathbf{Y}}$ durch die Gleichung (3.76) beschrieben. Die zu $\hat{\mathbf{Y}}$ thermodynamisch konjugierte innere Spannung lautet $\hat{\mathbf{Z}}$. Dieses rührt von den Nichtlinearitäten infolge großer Deformationen her. Die Analyse hat gezeigt, dass eine Reihe von algebraischen Umformungen benötigt wird, um eine Theorie aufzustellen, die sowohl bezüglich des Zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik als auch dem Postulat von Il'ushin, verallgemeinert für mikropolare Kontinua, konsistent ist.

Mittels des in ABAQUS implementierten Elementes wurde die Torsion eines Vollzylinders und der Zug einer gelochten Platte diskutiert. Die Finite-Elemente-Berechnungen demonstrieren, dass bei kleinen Geometrien die Berücksichtigung kinematischer Verfestigung auch für Deformationen mit monotonen Belastungen sehr wichtig ist. Dies ist ein wesentlicher Unterschied zu den klassischen Plastizitätsmodellen. Weitere Unterschiede wurden bei der einfachen Torsion hinsichtlich der Effekte zweiter Ordnung festgestellt. Für die gelochte Platte sagt die Theorie für mikroskopische Geometrien Längenabhängigkeiten voraus. Bei größeren Probengeometrien mit Einschnürung ist für die Beschreibung von Längenabhängigkeiten die Berücksichtigung von Schädigung erforderlich. Insgesamt können in Abhängigkeit von Materialparametern Abweichungen von klassischen Ergebnissen vorkommen. Auf eine umfassendere systematische Untersuchung des Einflusses von Materialparametern für verschiedene Strukturprobleme wurde in dieser Arbeit verzichtet. Der Grund liegt an den derzeit aufwendigen Finite-Elemente-Berechnungen. Diese Schwierigkeit kann durch die Entwicklung effizienterer numerischer Ver-

fahren zur Lösung solcher Probleme behoben werden.

A Transformationsbeziehungen bei überlagerten Starrkörperrotationen in der aktuellen und der plastischen Zwischenkonfiguration

Es kann gezeigt werden, dass bei beliebig überlagerten Starrkörperrotationen $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t)$ auf die aktuelle Konfiguration und gleichzeitig überlagerten Starrkörperrotationen $\mathbf{Q}_p = \mathbf{Q}_p(t)$ auf die plastische Zwischenkonfiguration, die folgenden Transformationsbeziehungen gelten (für einige der nachfolgenden Beziehungen vgl. GREEN & NAGHDI [47], CASEY & NAGHDI [19], [20]).

Deformations- und Geschwindigkeitsgradient

$$\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}^* = \mathbf{Q}\mathbf{F} = \mathbf{Q}\mathbf{F}_e\mathbf{Q}_p^T\mathbf{Q}_p\mathbf{F}_p \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{F}_e \rightarrow \mathbf{F}_e^* = \mathbf{Q}\mathbf{F}_e\mathbf{Q}_p^T \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{F}_p \rightarrow \mathbf{F}_p^* = \mathbf{Q}_p\mathbf{F}_p \quad (\text{A.3})$$

$$\hat{\mathbf{L}}_p \rightarrow \hat{\mathbf{L}}_p^* = \mathbf{Q}_p\hat{\mathbf{L}}_p\mathbf{Q}_p^T + \dot{\mathbf{Q}}_p\mathbf{Q}_p^T \quad (\text{A.4})$$

Mikropolare Rotation und Geschwindigkeit

$$\bar{\mathbf{R}} \rightarrow \bar{\mathbf{R}}^* = \mathbf{Q}\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{Q}\bar{\mathbf{R}}_e\mathbf{Q}_p^T\mathbf{Q}_p\bar{\mathbf{R}}_p \quad (\text{A.5})$$

$$\bar{\mathbf{R}}_e \rightarrow \bar{\mathbf{R}}_e^* = \mathbf{Q}\bar{\mathbf{R}}_e\mathbf{Q}_p^T \quad (\text{A.6})$$

$$\bar{\mathbf{R}}_p \rightarrow \bar{\mathbf{R}}_p^* = \mathbf{Q}_p\bar{\mathbf{R}}_p \quad (\text{A.7})$$

$$\hat{\mathbf{\Omega}}_p \rightarrow \hat{\mathbf{\Omega}}_p^* = \mathbf{Q}_p\hat{\mathbf{\Omega}}_p\mathbf{Q}_p^T + \dot{\mathbf{Q}}_p\mathbf{Q}_p^T \quad (\text{A.8})$$

Verzerrungs-, Krümmungs-, Spannungs-, Momentenspannungstensoren und Assoziierte Raten

Es bezeichne $\hat{\mathbf{X}}$ einen der folgenden Tensoren $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p, \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}, \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}_e, \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}_p, \hat{\mathbf{K}}, \hat{\mathbf{K}}_e, \hat{\mathbf{K}}_p, \overset{\diamond}{\hat{\mathbf{K}}}, \overset{\diamond}{\hat{\mathbf{K}}}_e, \overset{\diamond}{\hat{\mathbf{K}}}_p, \hat{\mathbf{T}}, \hat{\mathbf{T}}_c, \hat{\mathbf{P}}$. Dann gilt

$$\hat{\mathbf{X}} \rightarrow \hat{\mathbf{X}}^* = \mathbf{Q}_p \hat{\mathbf{X}} \mathbf{Q}_p^T \quad . \quad (\text{A.9})$$

B Zerlegung der kinematischen mikropolaren Größen

$\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$: Referenzkonfiguration

$\hat{\mathcal{R}}_t$: plastische Zwischenkonfiguration

\mathcal{R}_t : aktuelle Konfiguration

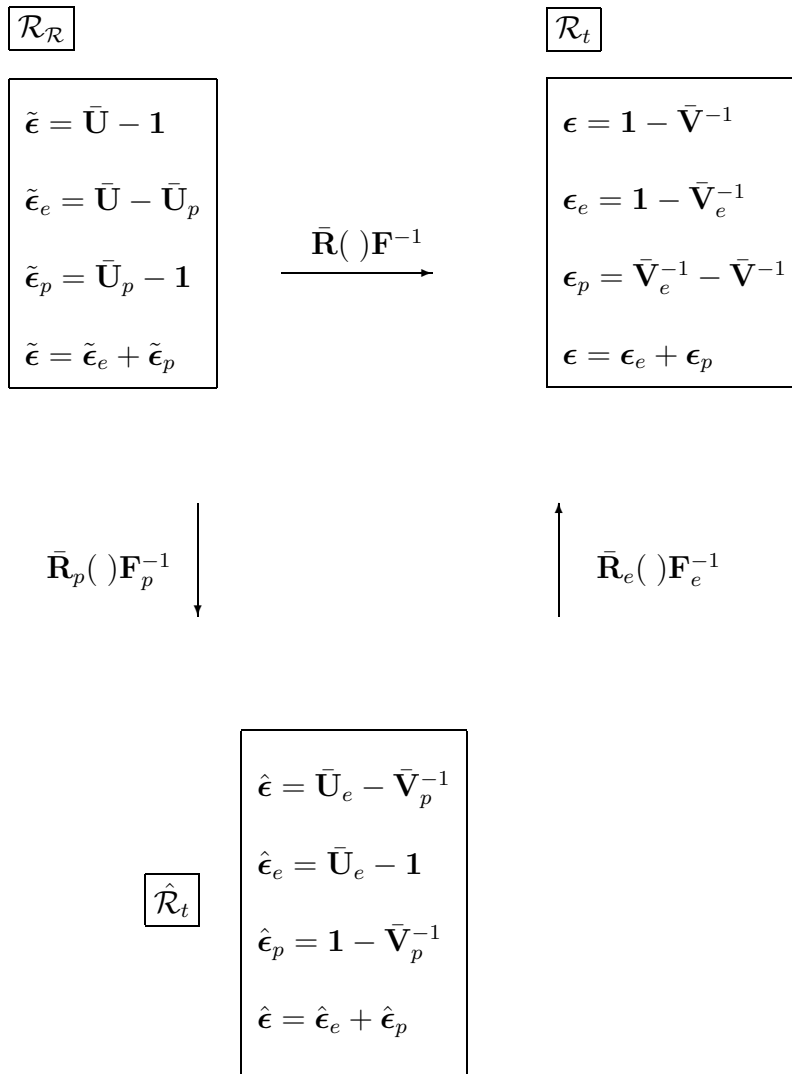


Tabelle B.1: Zerlegung der Verzerrungstensoren.

$$\hat{\mathbf{L}}_p = \dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1}, \hat{\mathbf{\Omega}} = \dot{\mathbf{R}}_p \bar{\mathbf{R}}_p^T : \text{relativ zu } \hat{\mathcal{R}}_t$$

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}, \mathbf{\Omega} = \dot{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{R}}^T : \text{relativ zu } \mathcal{R}_t$$

$(\cdot)^\cdot$: relativ zu $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$

$(\cdot)^\diamond = (\cdot)^\cdot - \hat{\mathbf{\Omega}}_p(\cdot) + (\cdot)^\cdot \hat{\mathbf{L}}_p$: relativ zu $\hat{\mathcal{R}}_t$

$(\cdot)^\diamond = (\cdot)^\cdot - \mathbf{\Omega}(\cdot) + (\cdot)^\cdot \mathbf{L}$: relativ zu \mathcal{R}_t

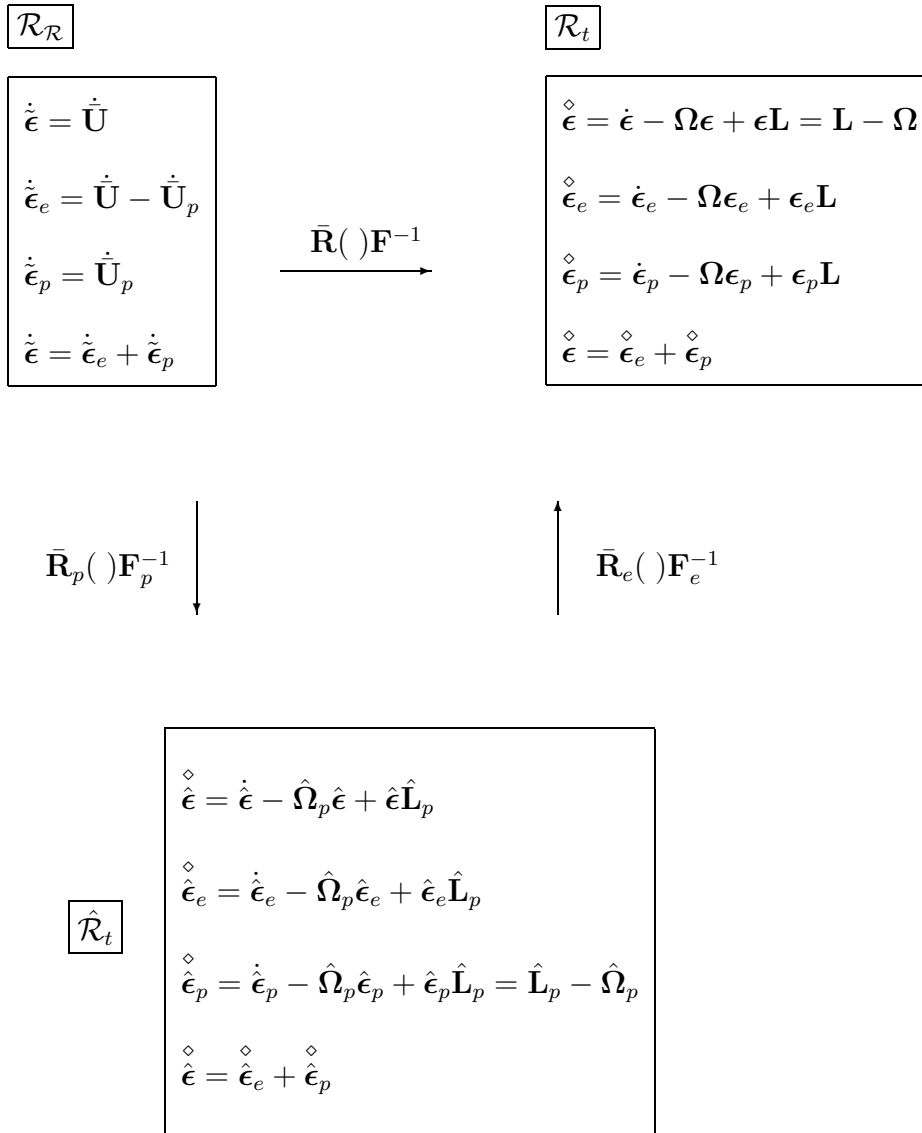


Tabelle B.2: Zerlegung der Verzerrungsraten.

$\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$: Referenzkonfiguration

$\hat{\mathcal{R}}_t$: plastische Zwischenkonfiguration

\mathcal{R}_t : aktuelle Konfiguration

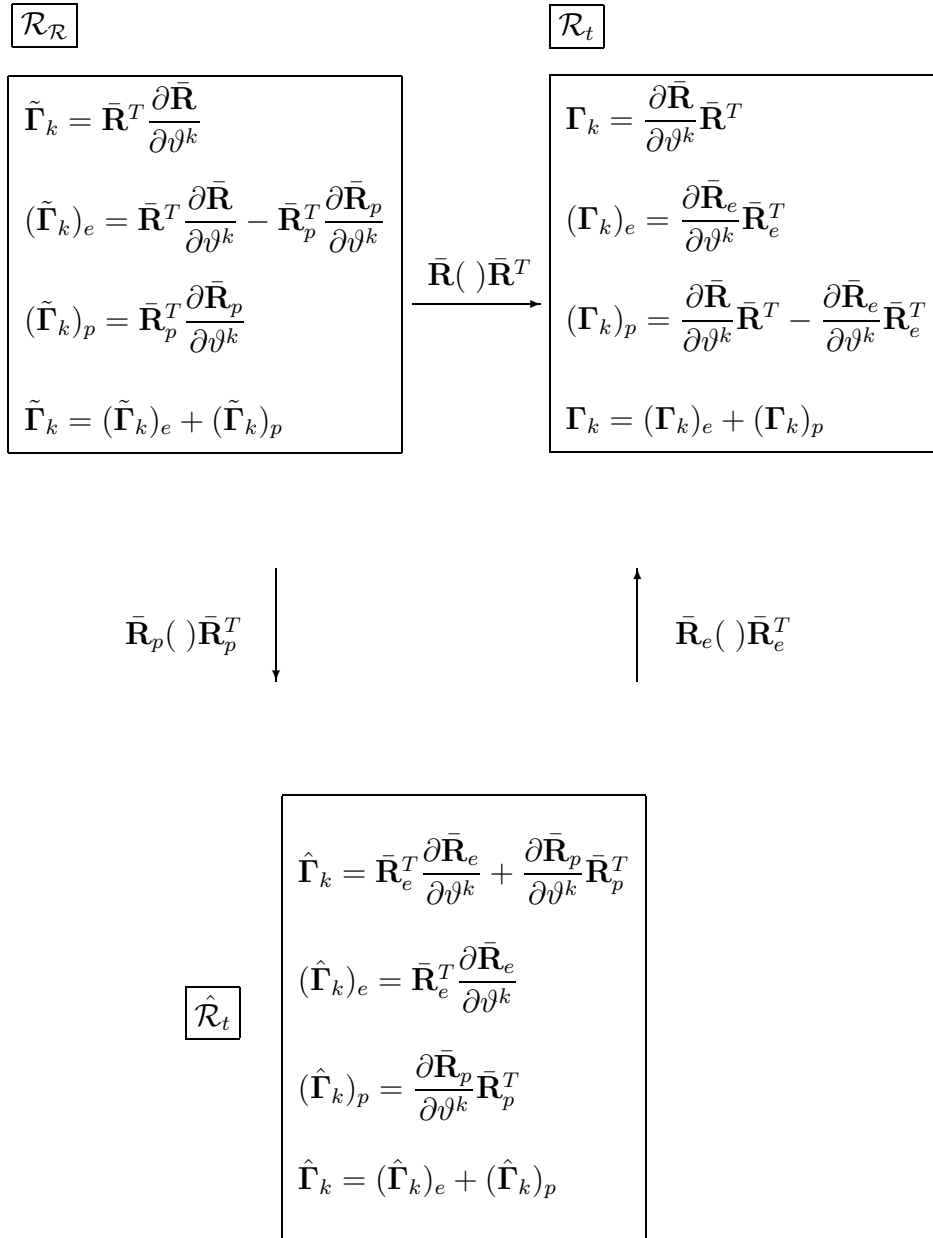


Tabelle B.3: Zerlegung der Krümmungsteneren $\tilde{\Gamma}_k$, $\hat{\Gamma}_k$, Γ_k .

$$\hat{\Omega}_p = \dot{\bar{\mathbf{R}}}_p \bar{\mathbf{R}}_p^T : \text{relativ zu } \hat{\mathcal{R}}_t$$

$$\Omega = \dot{\bar{\mathbf{R}}}\bar{\mathbf{R}}^T : \text{relativ zu } \mathcal{R}_t$$

$(\cdot)^\circ$: relativ zu $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$

$(\cdot)^\diamond = (\cdot)^\circ - \hat{\Omega}_p(\cdot) - (\cdot)\hat{\Omega}_p^T$: relativ zu $\hat{\mathcal{R}}_t$

$(\cdot)^\diamond = (\cdot)^\circ - \Omega(\cdot) - (\cdot)\Omega^T$: relativ zu \mathcal{R}_t

$\boxed{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}}$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\Gamma}}_k &= \bar{\mathbf{R}}^T \frac{\partial \Omega}{\partial \vartheta^k} \bar{\mathbf{R}} \\ (\tilde{\Gamma}_k)_e^\circ &= \bar{\mathbf{R}}^T \frac{\partial \Omega}{\partial \vartheta^k} \bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}_p^T \frac{\partial \hat{\Omega}_p}{\partial \vartheta^k} \bar{\mathbf{R}}_p \\ (\tilde{\Gamma}_k)_p^\circ &= \bar{\mathbf{R}}_p^T \frac{\partial \hat{\Omega}_p}{\partial \vartheta^k} \bar{\mathbf{R}}_p \\ \dot{\tilde{\Gamma}}_k &= (\tilde{\Gamma}_k)_e^\circ + (\tilde{\Gamma}_k)_p^\circ \end{aligned}$$

$\xrightarrow{\bar{\mathbf{R}}(\cdot)\bar{\mathbf{R}}^T}$

$\boxed{\mathcal{R}_t}$

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}_k^\diamond &= \dot{\tilde{\Gamma}}_k - \Omega \tilde{\Gamma}_k - \tilde{\Gamma}_k \Omega^T = \frac{\partial \Omega}{\partial \vartheta^k} \\ (\Gamma_k)_e^\diamond &= (\tilde{\Gamma}_k)_e^\circ - \Omega (\tilde{\Gamma}_k)_e - (\tilde{\Gamma}_k)_e \Omega^T \\ (\Gamma_k)_p^\diamond &= (\tilde{\Gamma}_k)_p^\circ - \Omega (\tilde{\Gamma}_k)_p - (\tilde{\Gamma}_k)_p \Omega^T \\ \dot{\Gamma}_k^\diamond &= (\Gamma_k)_e^\diamond + (\Gamma_k)_p^\diamond \end{aligned}$$

$\bar{\mathbf{R}}_p(\cdot)\bar{\mathbf{R}}_p^T \downarrow$

$\uparrow \bar{\mathbf{R}}_e(\cdot)\bar{\mathbf{R}}_e^T$

$\boxed{\hat{\mathcal{R}}_t}$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\Gamma}}_k^\diamond &= \dot{\tilde{\Gamma}}_k - \hat{\Omega}_p \tilde{\Gamma}_k - \tilde{\Gamma}_k \hat{\Omega}_p^T \\ (\hat{\Gamma}_k)_e^\diamond &= (\tilde{\Gamma}_k)_e^\circ - \hat{\Omega}_p (\tilde{\Gamma}_k)_e - (\tilde{\Gamma}_k)_e \hat{\Omega}_p^T \\ (\hat{\Gamma}_k)_p^\diamond &= (\tilde{\Gamma}_k)_p^\circ - \hat{\Omega}_p (\tilde{\Gamma}_k)_p - (\tilde{\Gamma}_k)_p \hat{\Omega}_p^T = \frac{\partial \hat{\Omega}_p}{\partial \vartheta^k} \\ \dot{\hat{\Gamma}}_k^\diamond &= (\hat{\Gamma}_k)_e^\diamond + (\hat{\Gamma}_k)_p^\diamond \end{aligned}$$

Tabelle B.4: Zerlegung der assoziierten Raten für $\tilde{\Gamma}_k$, $\hat{\Gamma}_k$, Γ_k .

$\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$: Referenzkonfiguration

$\hat{\mathcal{R}}_t$: plastische Zwischenkonfiguration

\mathcal{R}_t : aktuelle Konfiguration

$\text{axl}(\cdot)$: axialer Vektor von (\cdot)

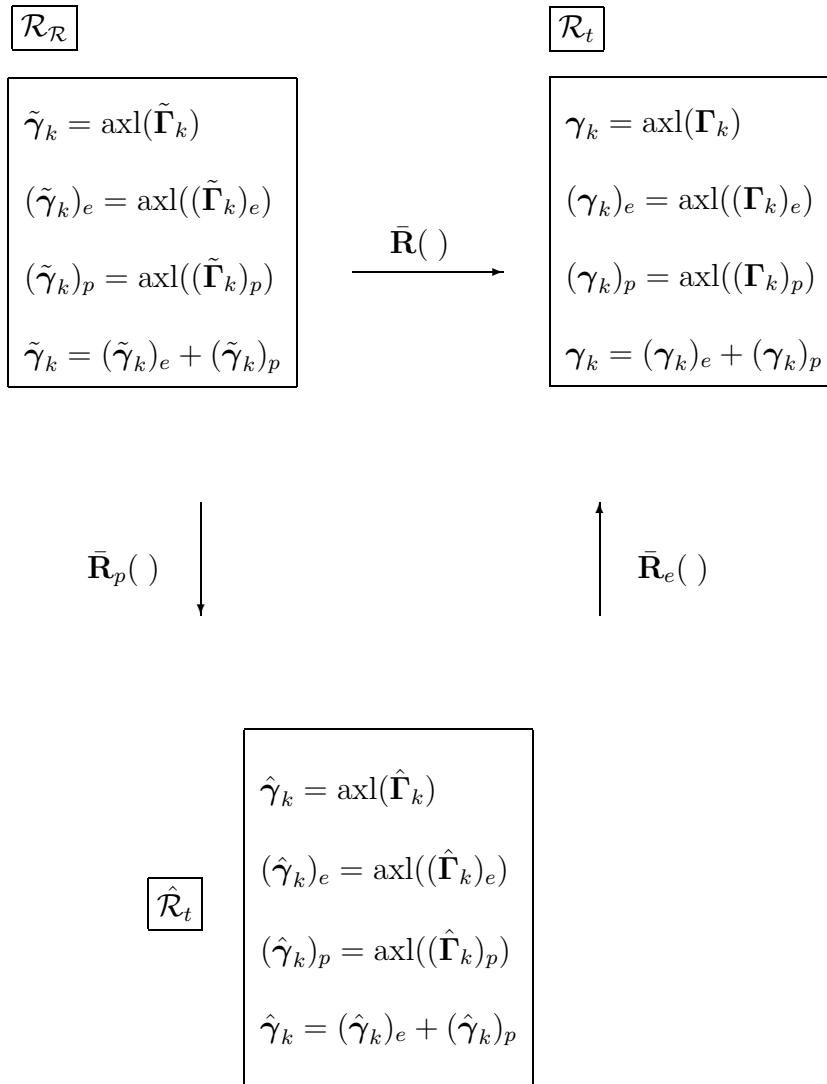


Tabelle B.5: Zerlegung der axialen Vektoren $\tilde{\gamma}_k$, $\hat{\gamma}_k$, γ_k .

$$\hat{\Omega}_p = \hat{\mathbf{R}}_p \bar{\mathbf{R}}_p^T : \text{relativ zu } \hat{\mathcal{R}}_t$$

$$\Omega = \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{R}}^T : \text{relativ zu } \mathcal{R}_t$$

$$\hat{\omega}_p = \text{axl}(\hat{\Omega}_p), \quad \frac{\partial \hat{\omega}_p}{\partial \vartheta^k} = \text{axl} \left(\frac{\partial \hat{\Omega}_p}{\partial \vartheta^k} \right) = \text{axl}((\hat{\Gamma}_k)_p^\diamond)$$

$$\omega = \text{axl}(\Omega), \quad \frac{\partial \omega}{\partial \vartheta^k} = \text{axl} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \vartheta^k} \right) = \text{axl}(\Gamma_k^\diamond)$$

$(\cdot)^\cdot$: relativ zu $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$

$(\cdot)^\diamond = (\cdot)^\cdot - \hat{\Omega}_p(\cdot)$: relativ zu $\hat{\mathcal{R}}_t$

$(\cdot)^\diamond = (\cdot)^\cdot - \Omega(\cdot)$: relativ zu \mathcal{R}_t

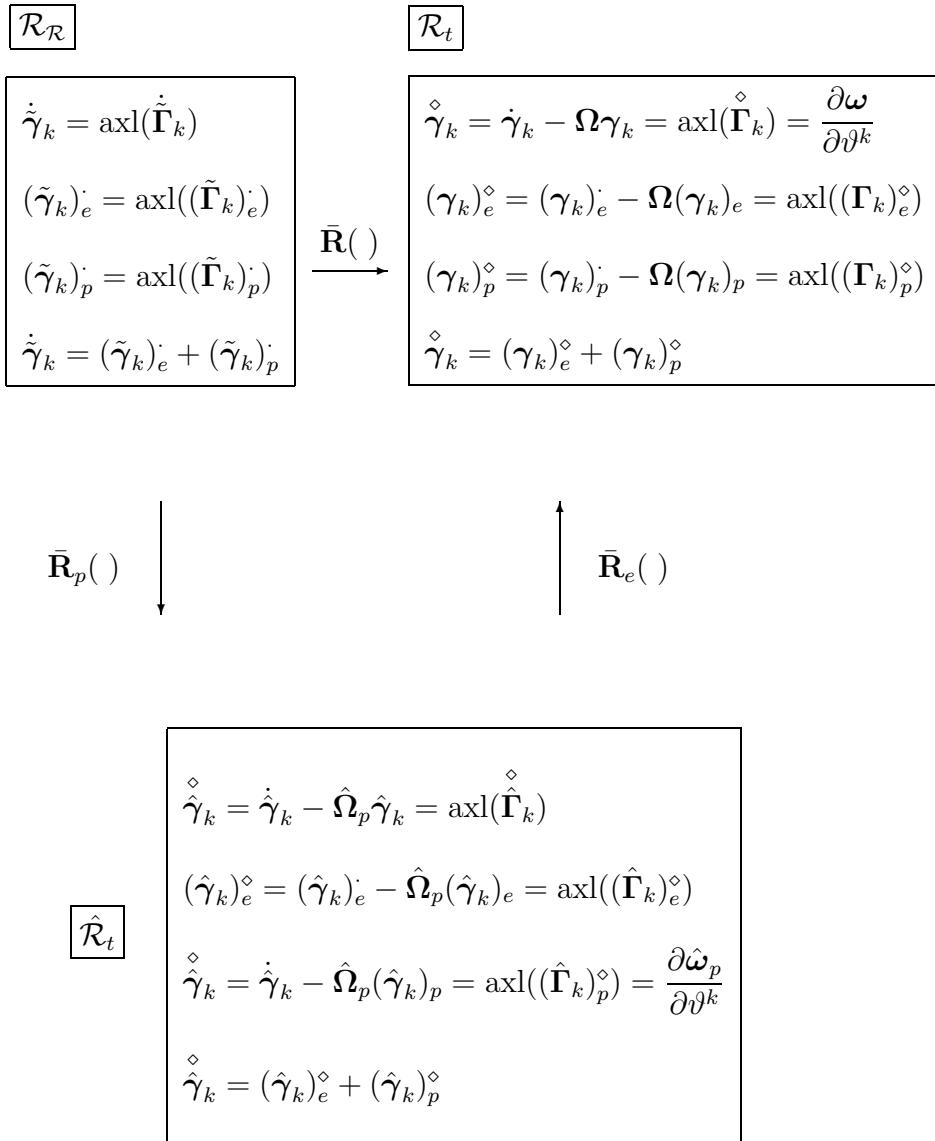


Tabelle B.6: Zerlegung der assoziierten Raten für $\tilde{\gamma}_k$, $\hat{\gamma}_k$, γ_k .

$\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$: Referenzkonfiguration

$\hat{\mathcal{R}}_t$: plastische Zwischenkonfiguration

\mathcal{R}_t : aktuelle Konfiguration

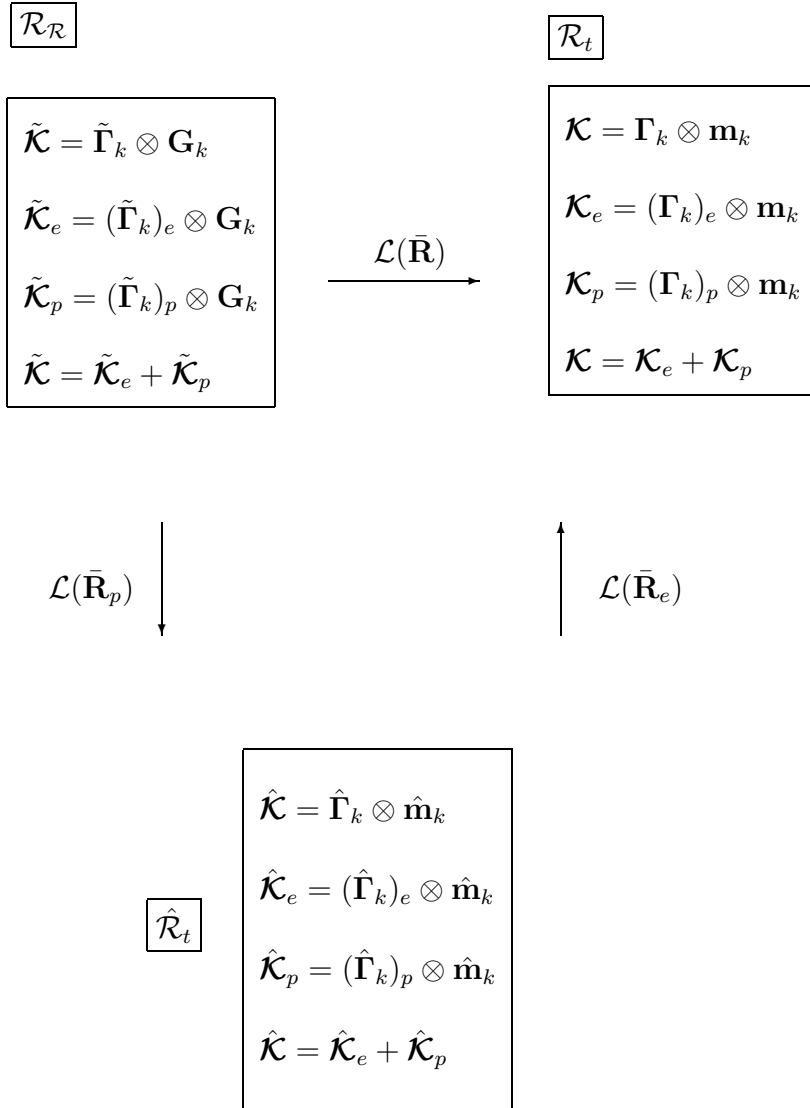


Tabelle B.7: Zerlegung der Krümmungstensoren $\tilde{\mathcal{K}}$, $\hat{\mathcal{K}}$, \mathcal{K} .

$$\hat{\Omega}_p = \dot{\hat{\mathbf{R}}}_p \bar{\mathbf{R}}_p^T : \text{relativ zu } \hat{\mathcal{R}}_t \text{ und } \hat{\omega}_p = \text{axl}(\hat{\Omega}_p), \frac{\partial \hat{\omega}_p}{\partial \vartheta^k} = \text{axl} \left(\frac{\partial \hat{\Omega}_p}{\partial \vartheta^k} \right) = \text{axl}((\hat{\Gamma}_k)_p^\diamond)$$

$$\Omega = \dot{\hat{\mathbf{R}}}\bar{\mathbf{R}}^T : \text{relativ zu } \mathcal{R}_t \text{ und } \omega = \text{axl}(\Omega), \frac{\partial \omega}{\partial \vartheta^k} = \text{axl} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \vartheta^k} \right) = \text{axl}(\hat{\Gamma}_k^\diamond)$$

$(\cdot)^\cdot$: relativ zu $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$

$(\cdot)^\diamond = (\cdot)^\cdot - \hat{\Omega}_p(\cdot) - \hat{\Omega}_p \diamond (\cdot) - (\cdot) \hat{\Omega}_p^T$: relativ zu $\hat{\mathcal{R}}_t$

$(\cdot)^\diamond = (\cdot)^\cdot - \Omega(\cdot) - \Omega \diamond (\cdot) - (\cdot) \Omega^T$: relativ zu \mathcal{R}_t

$\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$		\mathcal{R}_t	
$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathcal{K}}} &= \dot{\hat{\Gamma}}_k \otimes \mathbf{G}_k \\ \dot{\hat{\mathcal{K}}}_e &= (\tilde{\Gamma}_k)_e^\cdot \otimes \mathbf{G}_k \\ \dot{\hat{\mathcal{K}}}_p &= (\tilde{\Gamma}_k)_p^\cdot \otimes \mathbf{G}_k \\ \dot{\hat{\mathcal{K}}} &= \dot{\hat{\mathcal{K}}}_e + \dot{\hat{\mathcal{K}}}_p \end{aligned}$	$\xrightarrow{\mathcal{L}(\bar{\mathbf{R}})}$	$\begin{aligned} \hat{\mathcal{K}} &= \dot{\hat{\mathcal{K}}} - \Omega \mathcal{K} - \Omega \diamond \mathcal{K} - \mathcal{K} \Omega^T \\ &= \hat{\Gamma}_k \otimes \mathbf{m}_k \\ \hat{\mathcal{K}}_e &= \dot{\hat{\mathcal{K}}}_e - \Omega \mathcal{K}_e - \Omega \diamond \mathcal{K}_e - \mathcal{K}_e \Omega^T \\ &= (\Gamma_k)_e^\diamond \otimes \mathbf{m}_k \\ \hat{\mathcal{K}}_p &= \dot{\hat{\mathcal{K}}}_p - \Omega \mathcal{K}_p - \Omega \diamond \mathcal{K}_p - \mathcal{K}_p \Omega^T \\ &= (\Gamma_k)_p^\diamond \otimes \mathbf{m}_k \\ \hat{\mathcal{K}} &= \hat{\mathcal{K}}_e + \hat{\mathcal{K}}_p \end{aligned}$	
$\downarrow \mathcal{L}(\bar{\mathbf{R}}_p)$		$\uparrow \mathcal{L}(\bar{\mathbf{R}}_e)$	

$\hat{\mathcal{R}}_t$	$\begin{aligned} \hat{\mathcal{K}} &= \dot{\hat{\mathcal{K}}} - \hat{\Omega}_p \hat{\mathcal{K}} - \hat{\Omega}_p \diamond \hat{\mathcal{K}} - \hat{\mathcal{K}} \hat{\Omega}_p^T = \hat{\Gamma}_k \otimes \hat{\mathbf{m}}_k \\ \hat{\mathcal{K}}_e &= \dot{\hat{\mathcal{K}}}_e - \hat{\Omega}_p \hat{\mathcal{K}}_e - \hat{\Omega}_p \diamond \hat{\mathcal{K}}_e - \hat{\mathcal{K}}_e \hat{\Omega}_p^T = (\hat{\Gamma}_k)_e^\diamond \otimes \hat{\mathbf{m}}_k \\ \hat{\mathcal{K}}_p &= \dot{\hat{\mathcal{K}}}_p - \hat{\Omega}_p \hat{\mathcal{K}}_p - \hat{\Omega}_p \diamond \hat{\mathcal{K}}_p - \hat{\mathcal{K}}_p \hat{\Omega}_p^T = (\hat{\Gamma}_k)_p^\diamond \otimes \hat{\mathbf{m}}_k \\ \hat{\mathcal{K}} &= \hat{\mathcal{K}}_e + \hat{\mathcal{K}}_p \end{aligned}$
-----------------------	--

Tabelle B.8: Zerlegung der assoziierten Raten für $\hat{\mathcal{K}}, \hat{\mathcal{K}}, \mathcal{K}$.

$\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$: Referenzkonfiguration

$\hat{\mathcal{R}}_t$: plastische Zwischenkonfiguration

\mathcal{R}_t : aktuelle Konfiguration

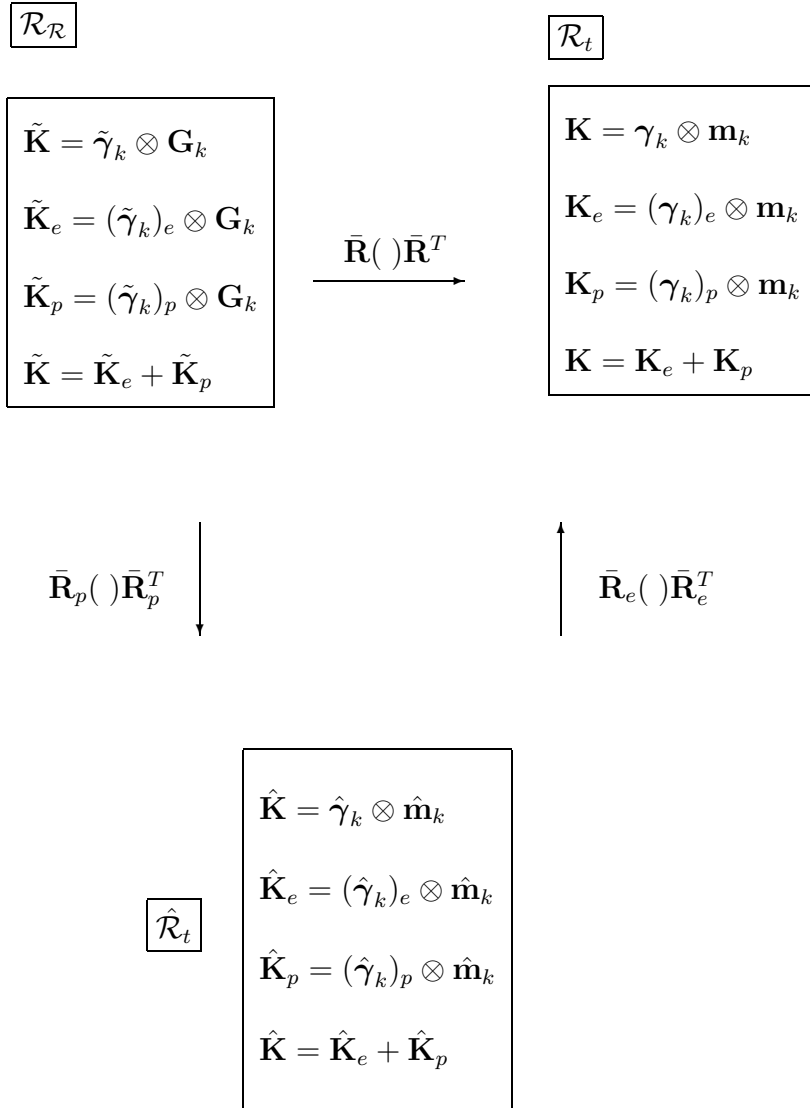


Tabelle B.9: Zerlegung der Krümmungstensoren $\tilde{\mathbf{K}}$, $\hat{\mathbf{K}}$, \mathbf{K} .

$$\hat{\Omega}_p = \dot{\hat{\mathbf{R}}}_p \bar{\mathbf{R}}_p^T : \text{relativ zu } \hat{\mathcal{R}}_t \text{ und } \hat{\omega}_p = \text{axl}(\hat{\Omega}_p), \frac{\partial \hat{\omega}_p}{\partial \vartheta^k} = \text{axl} \left(\frac{\partial \hat{\Omega}_p}{\partial \vartheta^k} \right) = \text{axl}((\hat{\Gamma}_k)_p^\diamond)$$

$$\Omega = \dot{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{R}}^T : \text{relativ zu } \mathcal{R}_t \text{ und } \omega = \text{axl}(\Omega), \frac{\partial \omega}{\partial \vartheta^k} = \text{axl} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \vartheta^k} \right) = \text{axl}(\hat{\Gamma}_k^\diamond)$$

$(\cdot)^\cdot$: relativ zu $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$

$(\cdot)^\diamond = (\cdot)^\cdot - \hat{\Omega}_p(\cdot) - (\cdot)\hat{\Omega}_p^T$: relativ zu $\hat{\mathcal{R}}_t$

$(\cdot)^\diamond = (\cdot)^\cdot - \Omega(\cdot) - (\cdot)\Omega^T$: relativ zu \mathcal{R}_t

$\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$		\mathcal{R}_t
$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{K}}} &= \dot{\hat{\gamma}}_k \otimes \mathbf{G}_k \\ \dot{\hat{\mathbf{K}}}_e &= (\dot{\hat{\gamma}}_k)_e \otimes \mathbf{G}_k \\ \dot{\hat{\mathbf{K}}}_p &= (\dot{\hat{\gamma}}_k)_p \otimes \mathbf{G}_k \\ \dot{\hat{\mathbf{K}}} &= \dot{\hat{\mathbf{K}}}_e + \dot{\hat{\mathbf{K}}}_p \end{aligned}$	$\xrightarrow{\bar{\mathbf{R}}(\cdot)\bar{\mathbf{R}}^T}$	$\begin{aligned} \hat{\mathbf{K}} &= \dot{\hat{\mathbf{K}}} - \Omega \dot{\hat{\mathbf{K}}} - \dot{\hat{\mathbf{K}}} \Omega^T = \dot{\hat{\gamma}}_k \otimes \mathbf{m}_k \\ &= \frac{\partial \omega}{\partial \vartheta^k} \otimes \mathbf{m}_k = (\text{grad} \omega) \bar{\mathbf{V}} \\ \hat{\mathbf{K}}_e &= \dot{\hat{\mathbf{K}}}_e - \Omega \dot{\hat{\mathbf{K}}}_e - \dot{\hat{\mathbf{K}}}_e \Omega^T = (\dot{\hat{\gamma}}_k)_e \otimes \mathbf{m}_k \\ \hat{\mathbf{K}}_p &= \dot{\hat{\mathbf{K}}}_p - \Omega \dot{\hat{\mathbf{K}}}_p - \dot{\hat{\mathbf{K}}}_p \Omega^T = (\dot{\hat{\gamma}}_k)_p \otimes \mathbf{m}_k \\ \hat{\mathbf{K}} &= \hat{\mathbf{K}}_e + \hat{\mathbf{K}}_p \end{aligned}$

$\bar{\mathbf{R}}_p(\cdot)\bar{\mathbf{R}}_p^T$	\downarrow	$\bar{\mathbf{R}}_e(\cdot)\bar{\mathbf{R}}_e^T$	\uparrow
---	--------------	---	------------

$\hat{\mathcal{R}}_t$	$\begin{aligned} \hat{\mathbf{K}} &= \dot{\hat{\mathbf{K}}} - \hat{\Omega}_p \dot{\hat{\mathbf{K}}} - \dot{\hat{\mathbf{K}}} \hat{\Omega}_p^T = \dot{\hat{\gamma}}_k \otimes \hat{\mathbf{m}}_k \\ \hat{\mathbf{K}}_e &= \dot{\hat{\mathbf{K}}}_e - \hat{\Omega}_p \dot{\hat{\mathbf{K}}}_e - \dot{\hat{\mathbf{K}}}_e \hat{\Omega}_p^T = (\dot{\hat{\gamma}}_k)_e \otimes \hat{\mathbf{m}}_k \\ \hat{\mathbf{K}}_p &= \dot{\hat{\mathbf{K}}}_p - \hat{\Omega}_p \dot{\hat{\mathbf{K}}}_p - \dot{\hat{\mathbf{K}}}_p \hat{\Omega}_p^T = (\dot{\hat{\gamma}}_k)_p \otimes \hat{\mathbf{m}}_k = \frac{\partial \hat{\omega}_p}{\partial \vartheta^k} \otimes \hat{\mathbf{m}}_k \\ \hat{\mathbf{K}} &= \hat{\mathbf{K}}_e + \hat{\mathbf{K}}_p \end{aligned}$
-----------------------	---

Tabelle B.10: Zerlegung der assoziierten Raten für $\hat{\mathbf{K}}, \hat{\mathbf{K}}, \mathbf{K}$.

$$\hat{\Omega}_p = \dot{\bar{\mathbf{R}}}_p \bar{\mathbf{R}}_p^T : \text{relativ zu } \hat{\mathcal{R}}_t$$

$$\Omega = \dot{\bar{\mathbf{R}}} \bar{\mathbf{R}}^T : \text{relativ zu } \mathcal{R}_t$$

$$(\cdot)^\cdot : \text{relativ zu } \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$$

$$(\cdot)^\diamond = (\cdot)^\cdot - \hat{\Omega}_p(\cdot) - (\cdot) \hat{\mathbf{L}}_p^T : \text{relativ zu } \hat{\mathcal{R}}_t$$

$$(\cdot)^\diamond = (\cdot)^\cdot - \Omega(\cdot) - (\cdot) \mathbf{L}^T : \text{relativ zu } \mathcal{R}_t$$

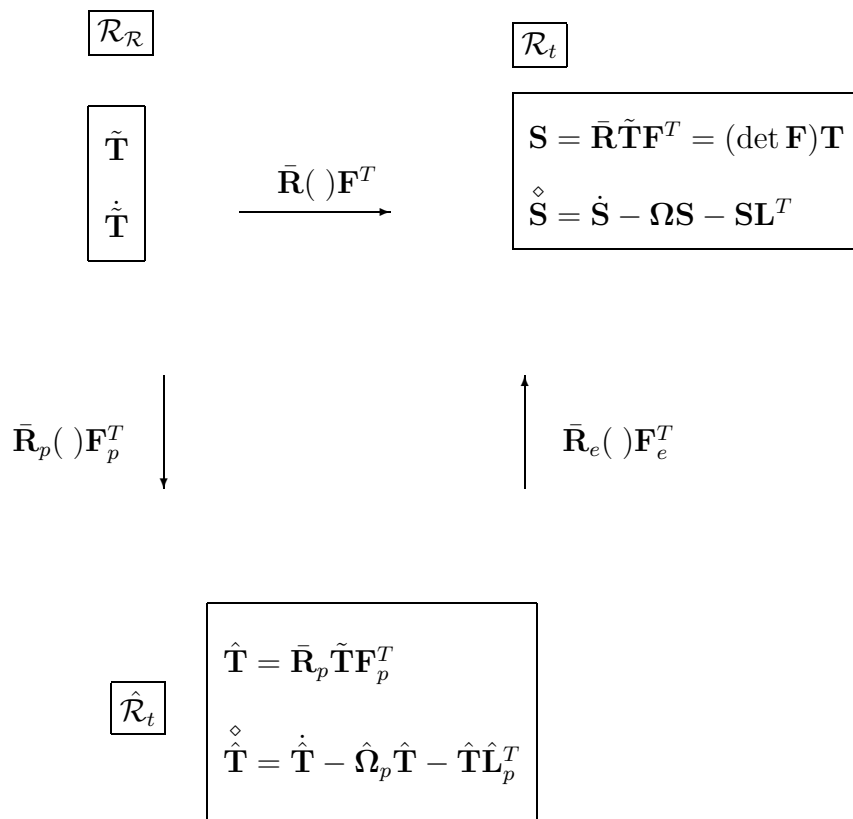


Tabelle B.11: Spannungstensor und assoziierte Raten.

$$\hat{\Omega}_p = \dot{\bar{\mathbf{R}}}_p \bar{\mathbf{R}}_p^T : \text{relativ zu } \hat{\mathcal{R}}_t$$

$$\Omega = \dot{\bar{\mathbf{R}}}\bar{\mathbf{R}}^T : \text{relativ zu } \mathcal{R}_t$$

$$(\cdot)^\cdot : \text{relativ zu } \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$$

$$(\cdot)^\diamond = (\cdot)^\cdot - \hat{\Omega}_p(\cdot) - (\cdot)\hat{\Omega}_p^T : \text{relativ zu } \hat{\mathcal{R}}_t$$

$$(\cdot)^\diamond = (\cdot)^\cdot - \Omega(\cdot) - (\cdot)\Omega^T : \text{relativ zu } \mathcal{R}_t$$

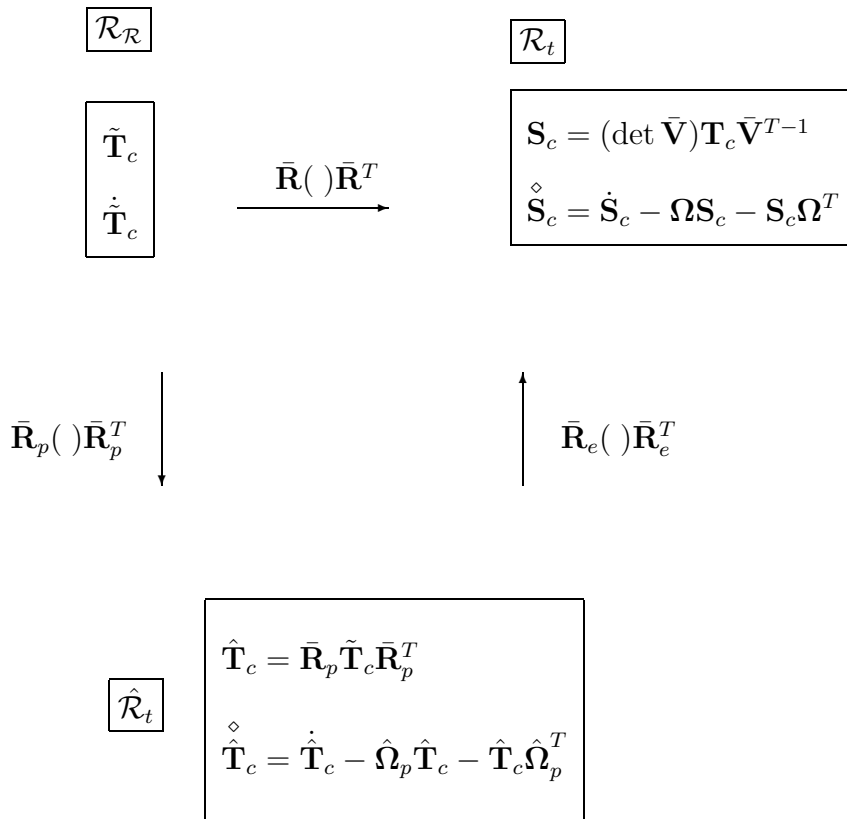


Tabelle B.12: Momentenspannungen und assoziierte Raten.

C Der Mandelsche Spannungstensor für rein elastische Systeme

Betrachtet wird das mechanische System in Abbildung C.1, das aus zwei in Reihe geschalteten mikropolaren elastischen Federn besteht. Diese verformen sich infolge einer vorgegebenen Last mit dem dazugehörigen Deformationsgradient und der dazugehörigen mikropolaren Rotation \mathbf{F}_e , $\bar{\mathbf{R}}_e$ und \mathbf{F}_p , $\bar{\mathbf{R}}_p$. Mit \mathbf{F} und $\bar{\mathbf{R}}$ werden der Deformationsgradient und die Rotation des Gesamtsystems bezeichnet, so dass

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p \quad (\text{C.1})$$

und

$$\bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{R}}_e \bar{\mathbf{R}}_p \quad . \quad (\text{C.2})$$

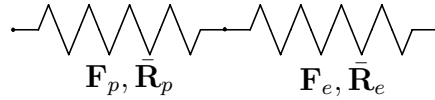


Abbildung C.1: Mechanisches System bestehend aus zwei isotropen mikropolaren elastischen Federn.

Den zwei Federn können die Verzerrungstensoren $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e$ und $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p$ sowie die Krümmungstensoren $\hat{\mathbf{K}}_e$ und $\hat{\mathbf{K}}_p$ zugeordnet werden. Die Verzerrungs- und Krümmungstensoren des Gesamtsystems lauten $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ und $\hat{\mathbf{K}}$. Wie in Gleichung (3.35) sollen für die spezifische freie Energie des Gesamtsystems Ψ folgende Beziehungen gelten (vgl. Gleichung (3.3)):

$$\Psi = \Psi_e + \Psi_p \quad , \quad (\text{C.3})$$

$$\Psi_e = \hat{\Psi}_e(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e, \hat{\mathbf{K}}_e) \quad , \quad (\text{C.4})$$

$$\Psi_p = \hat{\Psi}_p(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p, \hat{\mathbf{K}}_p) \quad . \quad (\text{C.5})$$

Ähnlich wie in Kapitel 3.1 ergibt sich, da das System rein elastisch ist, dann aus dem Zweiten Hauptsatz (3.4) die Gleichung

$$\left(\hat{\mathbf{T}} - \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e} \right) \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}} + \left(\hat{\mathbf{T}}_c - \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{K}}_e} \right) \cdot \hat{\mathbf{K}} + \varrho_{\mathcal{R}} (\mathbf{1} + \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e^T) \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p + \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{K}}_e} \cdot \hat{\mathbf{K}}_p - \varrho_{\mathcal{R}} \dot{\Psi}_p = 0 \quad (\text{C.6})$$

oder mit Hilfe von (3.24), (3.25) und (3.27)

$$\hat{\mathbf{P}} \cdot \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}} + \hat{\mathbf{T}}_c \cdot \overset{\diamond}{\hat{\mathbf{K}}} - \varrho_{\mathcal{R}} \dot{\Psi}_p = 0 \quad (\text{C.7})$$

mit

$$\hat{\mathbf{P}} = (\mathbf{1} + \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e^T) \hat{\mathbf{T}} \quad . \quad (\text{C.8})$$

Es ist ersichtlich, dass

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_p &= \frac{\partial \hat{\Psi}_p}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p} \cdot \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}_p - \frac{\partial \hat{\Psi}_p}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p \hat{\mathbf{L}}_p + \frac{\partial \hat{\Psi}_p}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p} \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}}_p \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p + \frac{\partial \hat{\Psi}_p}{\partial \hat{\mathbf{K}}_p} \cdot \overset{\diamond}{\hat{\mathbf{K}}}_p + \frac{\partial \hat{\Psi}_p}{\partial \hat{\mathbf{K}}_p} \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}}_p \hat{\mathbf{K}}_p + \frac{\partial \hat{\Psi}_p}{\partial \hat{\mathbf{K}}_p} \cdot \hat{\mathbf{K}}_p \hat{\boldsymbol{\Omega}}_p \\ &= (\mathbf{1} - \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p^T) \frac{\partial \hat{\Psi}_p}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p} \cdot \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}_p + \frac{\partial \hat{\Psi}_p}{\partial \hat{\mathbf{K}}_p} \cdot \overset{\diamond}{\hat{\mathbf{K}}}_p \quad , \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

wobei als Folge aus der Isotropie von $\hat{\Psi}_p$

$$\frac{\partial \hat{\Psi}_p}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p^T - \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p^T \frac{\partial \hat{\Psi}_p}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p} + \frac{\partial \hat{\Psi}_p}{\partial \hat{\mathbf{K}}_p} \hat{\mathbf{K}}_p^T - \hat{\mathbf{K}}_p^T \frac{\partial \hat{\Psi}_p}{\partial \hat{\mathbf{K}}_p} = \text{symmetrisch} \quad (\text{C.10})$$

verwendet wurde. Nach Einsetzen von Gleichung (C.9) in die Beziehung (C.7), folgt

$$\left(\hat{\mathbf{P}} - \varrho_{\mathcal{R}} (\mathbf{1} - \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p^T) \frac{\partial \hat{\Psi}_p}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p} \right) \cdot \overset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}_p + \left(\hat{\mathbf{T}}_c - \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_p}{\partial \hat{\mathbf{K}}_p} \right) \cdot \overset{\diamond}{\hat{\mathbf{K}}}_p = 0 \quad , \quad (\text{C.11})$$

was erfüllt ist, genau dann wenn

$$\hat{\mathbf{P}} = \varrho_{\mathcal{R}} (\mathbf{1} - \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p^T) \frac{\partial \hat{\Psi}_p}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p} \quad , \quad (\text{C.12})$$

$$\hat{\mathbf{T}}_c \equiv \hat{\mathbf{P}}_c = \varrho_{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\Psi}_p}{\partial \hat{\mathbf{K}}_p} \quad . \quad (\text{C.13})$$

Die Resultate von (C.12) liefern eine Motivation für die Definition von $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ in (3.76). Es ist nahe liegend, hier von einer multiplikativen Zerlegung von \mathbf{F}_p und $\bar{\mathbf{R}}_p$ auszugehen, die dann zu den additiven Zerlegungen (3.63) und (3.64) führt.

Literaturverzeichnis

- [1] *ABAQUS theory manual, version 6.1.*
- [2] *ABAQUS user's manual, version 6.1.*
- [3] AIFANTIS, E.C.: *On the role of gradients in the localization of deformation and fracture.* International Journal of Engineering Science, 30:1279–1299, 1992.
- [4] AKTAA, J., HÄDRICH, H.J., JULISCH, P., KLOTZ M. and R. SCHMITT: *Investigations to size effects on plastic deformation and failure behavior of inhomogeneously loaded structures.* 2001.
- [5] ALTENBACH J. und H. ALTENBACH: *Einführung in die Kontinuumsmechanik.* Teubner Studienbücher, Mechanik, Stuttgart, 1994.
- [6] ARZT, E.: *Size effects in materials due to microstructural and dimensional constraints: A comparative review.* Acta Materialia, 46:5611–5626, 1998.
- [7] BADER, S., KALAUGHER E.M. and E. ARZT: *Comparison of mechanical properties and microstructure of Al(1 wt. %Si) and Al(1 wt. %Si, 0.5 wt. %Cu) thin films.* Thin Solid Films, 263:175–184, 1995.
- [8] BAKER, S.P., KELLER R.-M. and E. ARZT: *Energy storage and recovery in thin metal films on substrates.* MRS Symposium Proceedings, 505:605–610, 1997.
- [9] BATHE, K.J.: *Finite-Elemente-Methoden.* Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [10] BECKER E. und W. BÜRGER: *Kontinuumsmechanik.* Teubner Studienbücher, Mechanik, Stuttgart, 1975.
- [11] BELYTSCHKO, T., LIN W.K. and B. MORAN: *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures.* John Wiley, Chichester, 2000.
- [12] BESDO, D.: *Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat-Kontinuums.* Acta Mechanica, 20:105–131, 1974.
- [13] BESDO, D.: *Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat-Kontinuums.* Doktorarbeit, TU Braunschweig, 1974.

- [14] BONET, J. and R.D. WOOD: *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [15] BORST, R. DE: *Simulation of strain localization: A reappraisal of the Cosserat continuum*. Engineering Computations, 8:317–332, 1991.
- [16] BORST, R. DE: *A generalization of J_2 -flow theory for polar continua*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 103:347–362, 1993.
- [17] BORST, R. DE and H.-B. MÜHLHAUS: *Finite deformation analysis of inelastic materials with micro-structure*. In BESDO D. and E. STEIN (editors): *Finite Inelastic Deformations – Theory and Applications, IUTAM Symposium Hannover, Germany, 1991*, pages 313–322. Springer, 1992.
- [18] BURNETT, D.S.: *Finite element analysis : From concepts to applications*. Addison-Wesley, Reading/Mass., 1988.
- [19] CASEY, J. and P.M. NAGHDI: *A remark on the use of the decomposition $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p$ in plasticity*. Journal of Applied Mechanics, 47:672–675, 1980.
- [20] CASEY, J. and P.M. NAGHDI: *A correct definition of elastic and plastic deformation and its computational significance*. Journal of Applied Mechanics, 48:983–985, 1981.
- [21] CASEY, J. and M. TSENG: *A constitutive restriction related to convexity of yield surfaces in plasticity*. Journal of Applied Mechanics, 35:478–496, 1984.
- [22] CHADWICK, P.: *Continuum mechanics : Concise theory and problems*. Allen & Unwin, London, 1976.
- [23] COLEMAN, B.D. and M.E. GURTIN: *Thermodynamics with internal state variables*. J. Chem. Phys., 47:597–613, 1967.
- [24] COSSERAT, E. and F. COSSERAT: *Théorie des Corps Déformables*. Herman et fils, Paris, 1909.
- [25] CRISFIELD, M.A.: *Nonlinear finite element analysis of solids and structures, volume 1: Essentials*. John Wiley, Chichester, 1991.
- [26] CRISFIELD, M.A.: *Nonlinear finite element analysis of solids and structures, volume 2: Advanced Topics*. John Wiley, Chichester, 1997.
- [27] DAFALIAS, Y.F.: *Il'iusin's postulate and resulting thermodynamic conditions on elastic-plastic coupling*. International Journal of Solids and Structure, 13:239–251, 1977.
- [28] DHATT, G. and G. TOUZOT: *The finite element method displayed*. Wiley-Interscience, Chichester, 1985.
- [29] DIEGELE, E., HARTMANN ST. and CH. TSAKMAKIS: *Finite deformation plasticity and viscoplasticity laws exhibiting nonlinear hardening rules. Part I: Representative examples*. Computational Mechanics, 25:13–27, 2000.

-
- [30] DIEGELE, E., JANSOHN W. and CH. TSAKMAKIS: *Finite deformation plasticity and viscoplasticity laws exhibiting nonlinear hardening rules. Part I: Constitutive theory and numerical integration.* Computational Mechanics, 25:1–12, 2000.
- [31] DIEPOLDER, W., MANNL V. and H. LIPPMANN: *The Cosserat continuum, a model for grain rotations in metals?* International Journal of Plasticity, 7:313–328, 1991.
- [32] DIETSCHKE, A. and K. WILLAM: *Boundary effects in elasto-plastic Cosserat continua.* International Journal of Solids and Structures, 7:877–893, 1997.
- [33] DIETSCHKE, A., STEINMANN P. and K. WILLAM: *Micropolar elastoplasticity and its role in localization.* International Journal of Plasticity, 9:813–831, 1993.
- [34] ELSÄSSER, R.: *Bruchmechanische Untersuchungen für elastische mikropolare Kontinua.* Wissenschaftliche Berichte FZKA 6709, Forschungszentrum Karlsruhe, Technik und Umwelt, 2002.
- [35] ERINGEN, A.C.: *Theory of micropolar elasticity.* In LIEBOWITZ, H. (editor): *An Advanced Treatise*, pages 621–729. Academic Press, New York, 1968.
- [36] ERINGEN, A.C.: *Microcontinuum field theories: I. Foundations and Solids.* Springer Verlag, New York, 1999.
- [37] ERINGEN, A.C. and C.B. KAFADAR: *Polar field theories.* In ERINGEN, A.C. (editor): *Continuum Physics IV*, pages 2–75. Academic Press, New York, 1976.
- [38] ERINGEN, A.C. and E.S. SUHUBI: *Nonlinear theory of simple micro-elastic solids—i.* International Journal of Engineering Sciences, 2:189–203, 1964.
- [39] FLECK, N.A., HUANG, Y., NIX, W.D. and J.W. HUTCHINSON: *Strain gradient plasticity: Theory and experiment.* Acta Metallurgica et Materialia, 42:475–487, 1994.
- [40] FOREST, S., BARBE F. and G. CAILLETAUD: *Cosserat modelling of size effects in the mechanical behaviour of polycrystals and multi-phase materials.* International Journal of Solids and Structures, 37:7105–7126, 2000.
- [41] FOREST, S.: *Modelling slip, kink and shear banding in classical and generalized single crystal plasticity.* Acta Materialia, 9:3265–3281, 1998.
- [42] FOSDICK, R. and E. VOLKMANN: *Normality and convexity of the yield surface in nonlinear plasticity.* Quart. J. Appl. Math., 51:117–127, 1993.
- [43] FUNG, Y.C.: *Foundations of solid Mechanics.* Prentice Hall, INC., 1965.
- [44] FUNG, Y.C.: *An first course in Continuum Mechanics.* Prentice Hall, INC., 1969.
- [45] GÜNTHER, W.: *Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums.* Abhandlungen der Braunschweigischen Wiss. Ges., 10:195–213, 1958.

- [46] GRAMMENOUDIS, P. and CH. TSAKMAKIS: *Hardening rules for finite deformation micropolar plasticity: Restrictions imposed by the second law of thermodynamics and the postulate of Il'iusin*. Continuum Mechanics and Thermodynamics, 13:325–363, 2001.
- [47] GREEN, A.E. and P.M. NAGHDI: *Some remarks on elastic-plastic deformations at finite strains*. International Journal of Engineering Sciences, 9:1219–1229, 1971.
- [48] GURTIN, M.E.: *An Introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press, INC., 1981.
- [49] HARTMANN, S.: *Lösung von Randwertaufgaben der Elastoplastizität – Ein Finite-Element-Konzept für nichtlineare kinematische Verfestigung bei kleinen und finiten Verzerrungen*. Bericht 1/1993, Universität Gesamthochschule Kassel, Institut für Mechanik, 1993.
- [50] HAUPT, P.: *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2000.
- [51] HILL, R.: *On constitutive inequalities for simple materials - ii*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 16:315–322, 1968.
- [52] HILL, R. and J.R. RICE: *Elastic potentials and the structure of inelastic constitutive laws*. SIAM, 25:448–461, 1973.
- [53] HUGHES, T.J.R.: *The Finite Element Method : Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.
- [54] HÄUSLER, O. und CH. TSAKMAKIS: *Torsion eines Kreiszyllinders bei großen Deformationen und inkompressiblem Materialverhalten*. Wissenschaftliche Berichte FZKA 5598, Forschungszentrum Karlsruhe, Technik und Umwelt, 1995.
- [55] JANSOHN, W.: *Formulierung und Integration von Stoffgesetzen zur Beschreibung großer Deformationen in der Thermoplastizität und -viskoplastizität*. Wissenschaftliche Berichte FZKA 6002, Forschungszentrum Karlsruhe, Technik und Umwelt, 1997.
- [56] KRÖNER, E.: *Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 4:273–334, 1959.
- [57] LACHNER, D.: *Plastische Korndrehungen in Metallen — Modelle und Experimente*. Technischer Bericht 403, Fortschr.-Ber. VDI Reihe 5, 1995.
- [58] LAKES, R.S.: *Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized continua*. In MÜHLHAUS, H.-B. (editor): *Continuum Models for materials with microstructure*, pages 1–22. Wiley, New York, 1995.
- [59] LEIGH, D.C.: *Nonlinear Continuum Mechanics*. McGraw–Hill, INC., 1968.
- [60] LEMAITRE, J. and J.L. CHABOCHE: *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, 1990.

-
- [61] LIN, H.C. and M.P. NAGHDI: *Necessary and sufficient conditions for the validity of a work inequality in finite plasticity*. Quart. J. Mech. Appl. Math., 42:13–21, 1989.
- [62] LIPPMANN, H.: *Eine Cosserat–Theorie des plastischen Fließens*. Acta Mechanica, 8:255–284, 1969.
- [63] LIU, I-SHIH: *Continuum Mechanics*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2002.
- [64] LÄMMER, H.: *Thermoplastizität und Thermoviskoplastizität mit Schädigung bei kleinen und großen Deformationen*. Wissenschaftliche Berichte FZKA 6053, Forschungszentrum Karlsruhe, Technik und Umwelt, 1998.
- [65] LUBLINER, J.: *Normality rules in large-deformation plasticity*. Mechanics of Materials, 5:29–34, 1986.
- [66] LUBLINER, J.: *Plasticity Theory*. Macmillan Publishing Company, New York, 1990.
- [67] LUCCHESI, M. and M. SILHAVY: *Il’iushin’s conditions in non-isothermal plasticity*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 113:121–163, 1991.
- [68] MALVERN, L.E.: *Introduction to the Mechanics of a continuous medium*. Prentice Hall, INC., 1969.
- [69] MARSDEN, J.E. and T.J.R. HUGHES: *Mathematical Foundation of Elasticity*. Dover Publications, INC., 1983.
- [70] MAUGIN, G.A.: *The Thermodynamics of Plasticity and Fracture*. Cambridge University Press, New York et al., 1992.
- [71] MÜHLHAUS, H.-B. and I. VARDOULAKIS: *The thickness of shear bands in granular materials*. Géotechnique, 37:271–283, 1987.
- [72] MIEHE, C.: *Numerical computation of algorithmic (consistent) tangent moduli in large-strain computational inelasticity*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 134:223–240, 1996.
- [73] MINDLIN, R.D.: *Micro-structure in linear elasticity*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 16:51–78, 1963.
- [74] OGDEN, R.W.: *Non-Linear Elastic Deformations*. John Wiley & Sons, 1983.
- [75] REDDY, J.N.: *An introduction to the finite element method*. McGraw-Hill, New York, 2 edition, 1993.
- [76] SCHÄFER, H.: *Versuch einer Elastizitätstheorie des zweidimensionalen ebenen Cosserat–Kontinuums*. Miszellen d. angew. Mech, Seiten 277–292, 1962.
- [77] SCHWARZ, H.R.: *Methode der finiten Elemente : Eine Einführung unter besonderer Berücksichtigung der Rechenpraxis*, Band 47 der Reihe Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik (LAMM). Teubner, Stuttgart, 2 Auflage, 1986.

- [78] SIMO, J.C. and T.J.R. HUGHES: *Computational inelasticity*, volume 7 of *Interdisciplinary Applied Mathematics IAM*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [79] SIMO, J.C. and M. ORTIZ: *A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 49:221–245, 1985.
- [80] SRINIVASA, A.R.: *On the nature of the response functions in rate-independent plasticity*. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 32:103–119, 1997.
- [81] STEINMANN, P.: *A micropolar theory of finite deformation and finite rotation multiplicative elastoplasticity*. *International Journal of Solids and Structures*, 31:1063–1084, 1994.
- [82] STEINMANN, P. and E. STEIN: *A unifying treatise of variational principles for two types of micropolar continua*. *Acta Mechanica*, 121:215–232, 1997.
- [83] STEINMANN, P. and K. WILLAM: *Localization within the framework of micropolar elastoplasticity*. In O. BRÜLLER, V. MANNL and J. NAJAR (editors): *Advances in Continuum Mechanics*, pages 296–313. Springer, Berlin, 1991.
- [84] STÖLKEN, J.S. and A.G. EVANS: *A microbend test method for measuring the plasticity length scale*. *Acta Materialia*, 46:5109–5115, 1998.
- [85] TEJCHMAN, J. and W. WU: *Numerical study on patterning of shear bands in Cosserat continuum*. *Acta Mechanica*, 99:61–74, 1993.
- [86] TRUESDELL, C.: *A first course in rational Continuum Mechanics*. Academic Press, INC., 1977.
- [87] TRUESDELL, C. and W. NOLL: *The non-linear field theories of mechanics*. In S., FLÜGGE (editor): *Handbuch der Physik*, volume III/3. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1965.
- [88] TSAKMAKIS, CH.: *On the loading conditions and the decomposition of deformation*. In BOEHLER, J.-P. and A.S. KHAN (editors): *Anisotropy and localization of plastic deformation*, pages 335–356. Elsevier Applied Science, London & New York, 1991.
- [89] TSAKMAKIS, CH.: *Kinematic hardening rules in finite plasticity. Part I: A constitutive approach*. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 8:215–231, 1996.
- [90] TSAKMAKIS, CH.: *Remarks on Il'ushin's postulate*. *Arch. Mech.*, 49:677–695, 1997.
- [91] TSAKMAKIS, CH.: *Description of plastic anisotropy effects at large deformations. Part I: Restrictions imposed by the second law and the postulate of Il'ushin*. 2001.
- [92] TSAKMAKIS, CH. and A. WILLUWEIT: *Time integration algorithms for finite deformation plasticity*. In HUTTER, K. and H. BAASER (editors): *Deformation and Failure of Metallic Continua*, to appear, 2002.

- [93] TSAKMAKIS, CH. and A. WILLUWEIT: *A comparative study of kinematic hardening rules at finite deformations*. International Journal of Non-Linear Mechanics, in press, 2003.
- [94] VARDOULAKIS, I.: *Shear-banding and liquefaction in granular materials on the basis of a Cosserat continuum theory*. Ingenieur-Archiv, 59:106–113, 1989.
- [95] VOLK, W.: *Untersuchung des Lokalisierungsverhaltens mikropolarer poröser Medien mit Hilfe der Cosserat-Theorie*. Bericht Nr. II-2, Universität Stuttgart, Institut für Mechanik, Lehrstuhl II, 1999.
- [96] WANG, C.-C. and C. TRUESDELL: *Introduction to Rational Elasticity*. Noordhoff International Publishing, Leyden, 1973.
- [97] WRIGGERS, P.: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [98] ZHU, H.T., ZHIB H.M. and E.C. AIFANTIS: *On the role of strain gradients in adiabatic shear banding*. Acta Mechanica, 111:111–124, 1995.
- [99] ZIENKIEWICZ, O.C. and R.L. TAYLOR: *The finite element method*, volume 1: The Basis. McGraw-Hill Book, London, 4 edition, 1989.
- [100] ZIENKIEWICZ, O.C. and R.L. TAYLOR: *The finite element method*, volume 2: Solid Mechanics. McGraw-Hill Book, London, 4 edition, 1991.

Lebenslauf

Paschalis Grammenoudis

Heinheimer Straße 48
64289 Darmstadt

Geburtstag: 24.03.1971
Geburtsort: Karlsruhe, Deutschland
Nationalität: Griechenland

Schulbildung:

1977 – 1981 Viktor-von-Scheffel-Schule (Grundschule) in Karlsruhe
1981 – 1990 Helmholtz-Gymnasium Karlsruhe
05/1990 Abitur

Ausbildung:

1990 – 1996 Studium der Physik an der Universität Karlsruhe (TU)
09/1996 Abschluss: Diplom-Physiker an der Universität
Karlsruhe (TU)
Diplomarbeit: "Anwendung von neuronalen Netzen bei der
Auswertung von Ultraschallextinktionsmessungen".
Institut für mechanische Verfahrenstechnik und Mechanik
an der Universität Karlsruhe (TU).
Betreuer: Prof. Dr. rer. nat. H. Buggisch.

01/1997 – 07/1997 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Theoretische
Teilchenphysik an der Universität Karlsruhe (TU).
Betreuer: Prof. Dr. rer. nat. H. Pilkuhn.

seit 08/1997 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für
Mechanik, AG Kontinuumsmechanik (Materialtheorie),
Technische Universität Darmstadt.
Betreuer: Prof. Dr.-Ing. Ch. Tsakmakis.

