Una proprietà di minimo nella Cinematica delle deformazioni finite.

Nota di G. GRIOLI (a Roma).

Sunto. - *Si mette in evidenza che per lo spostamento omogeneo tangente a un qualunque spostamento finito sussiste una proprietà di minimo del tutto analoga a una ben nota proprietà degli spostamenti infinitesimi.*

Siano C_* la configurazione di riferimento di un generico sistema materiale continuo $\mathcal{S}$; C e C' le configurazioni attuali di $\mathcal{S}$ in conseguenza di due diversi spostamenti regolari S e S', P_* il generico punto di C_*; P il corrispondente di P_*.

Sia poi c_* una sfera di centro P_* e raggio ρ piccolissimo, da intendersi fissato una volta per tutte indipendentemente da P_*. Più precisamente intendiamo che ρ sia talmente piccolo che (in corrispondenza a ciascun P_*) in c_* gli spostamenti S e S' possano confondersi con i rispettivi spostamenti omogenei tangenti in P_*. Se gli spostamenti S e S' dovessero essere omogenei, nessuna limitazione sussisterebbe per ρ.

Con referenza al generico P_* si suol definire come *divario locale* dei due spostamenti S e S', l'integrale

$$d_{P_*} = \int_{c_*} |\overset{\circ}{Q'Q}|^2 dC_*,$$

intendendo per Q e Q' i punti corrispondenti in C e C' al generico punto Q_* di c_*.

Pensando comunque assegnato lo spostamento regolare S, ci si può domandare: in corrispondenza al generico P_* quale è lo spostamento rigido che presenta il minimo divario locale da S?

Qual'è insomma lo spostamento rigido che localmente approssima meglio S?

Per uno spostamento S infinitesimo la risposta è già data da tempo [1]: decomponendo lo spostamento (omogeneo, infinitesimo) della generica particella in uno spostamento rigido più una deformazione pura, si ottiene come spostamento rigido proprio quello che approssima meglio l'effettivo spostamento della particella.

Vogliamo mostrare come un teorema analogo sussista pur abbandonando l'ipotesi di infinitesimalità dello spostamento S, purchè lo spostamento omogeneo tangente a C in P_* si pensi decomposto

[1] Cfr. ad es. SOBRERO, *Lezioni di Fisica Matematica*, Roma, 1935-36.

(come certo è possibile) nel prodotto di una deformazione pura D^* per uno spostamento rigido, S_r^*. Precisamente — indicando con Δ_1, Δ_2, Δ_3 i coefficienti principali di dilatazione lineare in P_* — dimostreremo che (con referenza a P_*) pel divario locale di S da un *qualunque* spostamento rigido S_r' si ha sempre

$$d_{P_*} \geq \frac{4}{15}\pi\rho^5(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2)$$

valendo il segno $=$ quando e solo quando S_r' coincide con S_r^*. Anche nella dimostrazione ci atterremo alle locuzioni e notazioni adoperate dal prof. SIGNORINI in varie pubblicazioni (²) e nell'attuale suo corso sulle trasformazioni elastiche finite presso il R. Istituto Nazionale di Alta Matematica.

***

Riferendoci ad un determinato ma generico P_* intendiamo scelta la terna cartesiana trirettangola di riferimento $T \equiv P_* \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, con la condizione che essa sia terna principale di deformazione (in P_*) e in riguardo ad essa accenniamo con y_1, y_2, y_3, le coordinate del generico Q_*, con x_1, x_2, x_3 quelle del corrispondente Q.

Poniamo anche

$$\alpha \equiv \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{matrix} \right\| .$$

intendendo tutte le $\frac{\partial x_r}{\partial y_s}$ $(r, s = 1, 2, 3)$ calcolate in P_*.

Stante le condizioni di regolarità per lo spostamento S, la α è certo decomponibile nel prodotto a sinistra di una dilatazione a coefficienti principali tutti positivi, α_d, per un rotore, α_r: α_d caratterizza D^*, mentre S_r^* viene ad essere il prodotto della rotazione rigida caratterizzata da α_r per la traslazione P_*P.

In altri termini si ha

$$P_*Q = P_*P + PQ = P_*P + \alpha_r\alpha_d(P_*Q_*)$$

mentre, pensando anche S_r' come prodotto di una rotazione — caratterizzata da un certo rotore α_r' — per una traslazione — di

(²) A. SIGNORINI, « Atti della R. Accademia dei Lincei ». Rendiconti 1930, vol. XII, pag. 312: *Sulle deformazioni finite dei sistemi continui.*

vettore t' — si può porre

$$P_*Q' = \mathbf{t}' + \alpha_r'(P_*Q_*)$$

e quindi

(1) $$Q'Q = P_*P - \mathbf{t}' + \alpha_r\alpha_d(P_*Q_*) - \alpha_r'(P_*Q_*).$$

Di più, per il modo in cui è stata scelta la T, risulta

(2) $$\alpha_d \equiv \begin{Vmatrix} 1+\Delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\Delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\Delta_3 \end{Vmatrix}$$

con

(2') $$1 + \Delta_r > 0, \qquad (r = 1, 2, 3)$$

nonchè

(3) $$\int_{C_*} y_r dC_* = 0, \quad \int_{C_*} y_r y_s dC_* = 0, \quad \int_{C_*} y_r^2 dC_* = \frac{4}{15}\pi\rho^5,$$
$$(r, s = 1, 2, 3;\ r \neq s).$$

***

Poichè il divario locale dipende unicamente dal modulo dei vettori $Q'Q$, d_{P_*} non si altera se sostituiamo $Q'Q$ con $\alpha_r^{-1}(Q'Q)$, perchè l'omografia α_r^{-1} è anch'essa un rotore e quindi non altera le distanze.

Poniamo

(4) $$\mathbf{t}'' = \alpha_r^{-1}(P_*P - \mathbf{t}'), \quad \alpha_r'' = \alpha_r^{-1}\alpha_r',$$

con che anche l'omografia α_r'' viene ad essere un rotore.

In base a (1) si ottiene

(5) $$d_{P_*} = \int_{C_*} dC_* \,|\, \mathbf{t} + \alpha_d(P_*Q_*) - \alpha_r''(P_*Q_*)\,|^2.$$

Tenendo conto delle (2), (3) e dell'uguaglianza evidente

$$|\alpha_r''(P_*Q_*)|^2 = |P_*Q_*|^2,$$

la (5) si riduce subito a

$$d_{P_*} = \frac{4}{3}\pi\rho^3 t''^2 + \left\{ \sum_1^3{}_s (1+\Delta_s)^2 + 3 \right\} \frac{4}{15}\pi\rho^5 - 2\int_{C_*} dC_* \alpha_d(P_*Q_*) \times \alpha_r''(P_*Q_*).$$

D'altra parte chiamando c_{rs} i coefficienti dell'omografia α_r'' rispetto alla T, si ha [confronta ancora la (2) e la (3)]

$$\int_{C_*} dC_* \alpha_d(P_*Q_*) \times \alpha_r''(P_*Q_*) =$$
$$= \int_{C_*} dC_* \left\{ \sum_1^3{}_s (1+\Delta_s) y_s \mathbf{i}_s \times \sum_1^3{}_{rs} c_{rs} y_s \mathbf{i}_r \right\} = \frac{4}{15}\pi\rho^5 \sum_1^3{}_s (1+\Delta_s) c_{ss},$$

e si ha quindi l'espressione

$$(6)\qquad dP_* = \frac{4}{3}\pi\rho^3 t''^2 + \frac{4}{15}\pi\rho^5 \left\{ \sum_1^3{}_s (1+\Delta_s)^2 + 3 - 2(1+\Delta_s)c_{ss} \right\}.$$

Teniamo ora conto delle (2') e del fatto che, essendo tutti i c_{rs} coseni di direzione deve pur essere

$$c_{ss} \leq 1, \qquad (s=1, 2, 3).$$

Basta questo per dedurre da (6)

$$dP_* \geq \frac{4}{15}\pi\rho^5 \left\{ \sum_1^3{}_s (1+\Delta_s)^2 + 3 - 2(1+\Delta_s) \right\},$$

e cioè

$$(7)\qquad dP_* \geq \frac{4}{15}\pi\rho^5 \left\{ \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 \right\}.$$

Il segno uguale vale quando e solo quando simultaneamente si abbia

$$t''=0, \quad c_{ss}=1, \qquad (s=1, 2, 3).$$

Evidentemente le tre condizioni $c_{ss}=1$, $(s=1, 2, 3)$ si riassumono in quella che il rotore α_r'' si riduca all'identità.

Quindi il semplice richiamo delle (4) porta alla conclusione che nella (7) vale il segno uguale quando e solo quando si abbia simultaneamente

$$t = P_*P, \quad \alpha_r' = \alpha_r,$$

cioè quando e solo quando S_r' coincide con S_r^*, c. d. d.

Sulle serie di potenze.

Nota di U. Broggi
(a Roquebrune-Cap Martin-France A. M.)

Sunto. - *Si dà una condizione necessaria e sufficiente perchè* $+1$ *sia l'unico punto singolare posto sul circolo di convergenza di una serie di potenze, e si generalizzano i teoremi di* Wigert-Faber e di Leau-Faber.

1. Sia $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |c_n|^{\frac{1}{n}} = 1$. La serie

$$f(s) = c_0 + c_1 \frac{s-\alpha}{s+\beta} + c_2 \left(\frac{s-\alpha}{s+\beta}\right)^2 + \ldots$$

converge in $R(s) > \frac{\alpha-\beta}{2}$, l'altra

$$F(z) = c_0 + c_1 z + \ldots$$