Der Elastizitätsmodul des geraden Stabes als Funktion der spezifischen Beanspruchung.

Von

Prof. **Hartig.**

(Hierzu Tafel V.)

Die allgemeine Theorie der elastischen Formänderungen fester Körper nimmt für ein gegebenes Material je einen gewissen unveränderlichen — von der spezifischen Beanspruchung unabhängigen — Werth E des Elastizitätsmoduls für Zug und Druck an, den sie als Quotient aus spezifischer Spannung σ und zugehöriger relativer Dehnung ε des gezogenen oder gestauchten geraden Stabes[1]) definirt; sie erwartet, dass dieser Werth aus den Zug- und Druckversuchen mit passend gestalteten Probekörpern hergeleitet werde, was denn auch für die technisch wichtigsten Materialien bereits geschehen ist.

Obwohl sie den Werth E nur von der Substanz des untersuchten Körpers, nicht von seiner Form abhängig denkt, muss sie doch die Vorstellung des geraden Stabes dabei verwenden, mag sie nun die vorstehend bezeichnete oder die anderweite Definition vorziehen, wonach der Elastizitätsmodul diejenige Grösse darstellt, deren reziproker Werth die elastische Dehnung, beziehentlich Stauchung eines stabförmigen Körpers von der Länge 1 und dem Querschnitte 1 durch Einwirkung der Kraft 1 angiebt; sie hat damit der experimentellen Untersuchung den Weg zur Auffindung von E für die verschiedenen Baustoffe vorgeschrieben oder doch angedeutet.

Bei der Durchführung der zu diesem Zwecke schon unternommenen mancherlei Versuche hat sich für einzelne Baustoffe schon wiederholt die Gewissheit ergeben, dass der bei verschieden starken Beanspruchungen herleitbare Werth des Elastizitätsmoduls verschieden gross ausfällt. Nach Weyrauch, die Festigkeitseigenschaften von Eisen- und Stahlkonstruktionen (Leipzig 1889, S. 94) hat schon Hodgkinson gefunden, dass beim grauen Gusseisen der Elastizitätsmodul von 956 400 auf 672 300 (für Kilogramm und Quadratcentimeter) sinkt, wenn die spezifische Zugbelastung von 148 auf 1040 at erhöht wird, und im Jahrgange 1887 der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure (S. 221) theilt Prof. Bach die nachfolgenden entsprechenden Beobachtungszahlen mit:

Grenzen der spezifischen Beanspruchung σ kg/□cm	Elastizitätsmodul E kg/□cm
0 — 100	1 220 000
100 — 200	1 115 000
200 — 300	1 085 000
300 — 400	1 020 000

Considère berichtet (in „Anwendung von Eisen und Stahl bei Konstruktionen", deutsche Uebersetzung von E. Hauff, S. 78, Wien 1888) nach den Versuchen von Bubbe, dass der Elastizitätsmodul des grauen weichen Gusseisens bei Zugbeanspruchung von 950 000 im spannungslosen Zustande auf 180 000 in der Nähe der Bruchgrenze sich vermindere.

Auch an einem Kupferstabe weist Bach (in „Elastizität und Festigkeit", Berlin 1889—90, S. 8—11) eine Abminderung des Werthes E mit wachsender Zugbelastung nach; wächst σ von 100 bis 600 kg/□cm, so sinkt E von 1 100 000 auf 704 000.

Mit der Art, wie am letztbezeichneten Orte die Werthe von E oder zunächst die Werthe des „Dehnungskoëffizienten"

$$\alpha = \frac{1}{E}$$

aus den Ergebnissen einer Reihe von Belastungen und darauf folgenden Entlastungen hergeleitet werden, kann ich mich aber nicht befreunden; zunächst wird gewiss der mittelst zeitweiliger Entlastungen des Probestückes feststellbare Betrag der bleibenden Dehnung oder Stauchung bei der Berechnung von E auszuscheiden sein, und sodann will es mir nicht annehmbar erscheinen, für eine Arbeitskurve, die jedenfalls nicht mehr mittelst der linearen Gleichung

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

1) Bei den nachfolgenden Betrachtungen wird angenommen, dass es im Experiment gelinge, Dehnungen und Stauchungen des geraden Stabes auf dessen Länge, Spannungen auf dessen Querschnitt gleichmässig zu vertheilen, so dass alle zur Stabachse normalen Querschnitte Flächen gleicher Spannung sind; alsdann kann man von Grösse und Gestalt des Querschnittes, sowie von dem Verhältniss zwischen Querschnitt und Länge des Probestückes absehen, kann von ε und σ, sowie von E als von nur noch mit dem Stoff veränderlichen Grössen sprechen.

dargestellt werden kann, zur Berechnung von E für verschiedene Beanspruchungsintensitäten die Werthe von ε und σ immer aufs Neue von 0 an gerechnet einzuführen. Entsprechen sich, wie aus den Beobachtungen Bach's (S. 8 a. a. O.) hergeleitet werden kann, die Werthe für den Zuwachs

$\Delta\sigma$ der spezifischen Beanspruchung Atmosphären	$\Delta\varepsilon_e$ des elastischen Antheils der Dehnung
100	$9{,}0 \cdot 10^{-5}$
100	$8{,}4 \cdot 10^{-5}$
100	$9{,}4 \cdot 10^{-5}$
100	$10{,}0 \cdot 10^{-5}$
200	$27{,}4 \cdot 10^{-5}$,

so wird sich unter Benutzung des Ausdruckes

$$E = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon_e}$$

ergeben, dass der Elastizitätsmodul folgende Werthe durchläuft:

für das Intervall der spezifischen Zugspannung Atmosphären	Elastizitätsmodul
0 — 100	1 110 000
100 — 200	1 190 000
200 — 300	1 060 000
300 — 400	1 000 000
400 — 600	730 000

Von der Unregelmässigkeit im Intervall 100 — 200 at, in der ich einen Beobachtungsfehler vermuthe, abgesehen, ist hiernach für den verwendeten Kupferstab eine Abnahme des Elastizitätsmoduls mit wachsender Zugbeanspruchung ausser Zweifel, nur weichen die hier berechneten Werthe von denjenigen meines Kollegen Bach ab, wie nachfolgende Nebeneinanderstellung der Reziprokzahlen von E („Dehnungskoëffizient") erkennen lässt:

Intervall der spezifischen Belastung Atmosphären	Dehnungskoëffizient $\alpha = \frac{1}{E}$	
	nach Bach	nach dem Verf.
0 — 100	$\frac{1}{1\,100\,000}$	$\frac{1}{1\,110\,000}$
100 — 200	$\frac{1}{1\,100\,000}$	$\frac{1}{1\,190\,000}$
200 — 300	$\frac{1}{1\,024\,000}$	$\frac{1}{1\,060\,000}$
300 — 400	$\frac{1}{922\,000}$	$\frac{1}{1\,000\,000}$
400 — 600	$\frac{1}{704\,000}$	$\frac{1}{730\,000}$

Es kann für die Gewinnung einer weiteren Erkenntniss zunächst von Nutzen sein, solche Beobachtungsreihen heranzuziehen, bei denen die Ausscheidung der bleibenden Streckungen, beziehentlich Stauchungen ein verhältnissmässig grösseres Spannungsintervall als im vorliegenden Beispiele umschliesst, vielleicht die Beanspruchung bis zur Bruchgrenze fortgesetzt worden ist.

Mein Kollege Hugo Fischer veröffentlichte im Jahre 1882 (Dingler's polytechnisches Journal, Bd. 245, S. 64, Taf. VII) eine Untersuchung über das Verhalten des aus Phosphorbronze (von Lazare Weiller in Angoulême) hergestellten Drahtes bei Beanspruchung auf Zug. Es wurde hierbei das Zerreissmaschinchen von Reusch benutzt, das die Arbeitskurven direkt aufzeichnet und die wiederholte Entlastung des Probestückes, also die Ausscheidung der bleibenden Dehnungen bequem gestattet. Das Material ergab im ausgeglühten Zustande eine sehr grosse Gesammtdehnung ($Z = 0{,}553$ der Anfangslänge im Augenblicke des Bruches), deren elastischer Antheil durch Verwendung sehr langer Probestücke (bis zu $l = 5{,}48$ m) deutlich erkennbar gemacht wurde. Fischer hatte in der zu seiner Abhandlung gehörigen Fig. 3 bereits die Arbeitskurve der elastischen Dehnungen (OFG) entworfen, die in Fig. 1 auf Tafel V — unter Verwendung der mir nachträglich mitgetheilten vollständigeren Beobachtungswerthe — wiedergegeben ist. Man erkennt, dass hier der Elastizitätsmodul für ein Beanspruchungsintervall von $\Delta\sigma = 0$ bis 1270 at, dem eine elastische Dehnung $\Delta\varepsilon = \frac{109}{100\,000}$ entspricht, als konstant anzusehen ist, nämlich den Werth

$$E = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} = \frac{1270 \cdot 10^5}{109} = 1\,165\,000 \text{ kg/□cm}$$

aufweist; derselbe vermindert sich bei höheren Beanspruchungen auf einen Werth, der für das unmittelbar vor dem Bruch liegende Spannungsintervall $\Delta\sigma = 3300 - 3130 = 170$ at, einem Zuwachse an elastischer Dehnung von $\Delta\varepsilon = \frac{553}{10^5} - \frac{364}{10^5} = \frac{189}{10^5}$ entsprechend, auf

$$E' = \frac{170 \cdot 10^5}{189} = 90\,000 \text{ kg/□cm}$$

sich beziffert.

Der Uebergang von E zu E' hat sich als stetig erwiesen. Die Arbeitskurve der elastischen Dehnungen zeigt den allgemeinen Charakter des vollständigen (die bleibenden Streckungen einschliessenden) Dehnungsdiagrammes, nur dass seine Länge nicht mehr als $^1/_{100}$ von der Länge des letzteren beträgt.

Auch bei Gelegenheit einer umfassenderen Untersuchung über Metalldrähte, die im Jahrgange 1884 des Civilingenieurs veröffentlicht wurde, wies Prof. Fischer (auf Seite 401, 402, Fig. 3 auf Taf. XXV) auf die Abweichung der Arbeitskurve für die elastischen Dehnungen von der geraden Linie, also auf die bei den meisten Metalldrähten deutlich erkennbare Veränderlichkeit von E mit σ und ε hin.

Dass bei Metalldrähten auch schon für verhältnissmässig geringe Zugbeanspruchungen eine Veränderung des Elastizitätsmoduls mit σ nachweisbar ist, wenn man nur eine recht grosse Stablänge verwendet und der feinsten Messinstrumente und grössten wissenschaftlichen Vorsicht sich bedient, hat in einer neueren von Prof. F. Kohlrausch angeregten Untersuchung der Physiker Dr. Osgood Thompson gezeigt (vgl. Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie 1891, S. 555). Derselbe fand den Zusammenhang zwischen der absoluten Belastung y und der absoluten Dehnung x darstellbar durch eine algebraische Gleichung

$$x = ay + by^2 + cy^3$$

und erhielt z. B. für einen Stahldraht von 22,683 m Länge, 0,03263 □mm Querschnitt, 7,74 spezifischem Gewicht

die Verlängerungen x^{mm}, die den Belastungen y^{kg} entsprechen:

$$x = 34{,}672 \cdot y + 0{,}6498 \cdot y^2 - 0{,}0525\, y^3,$$

woraus durch Nullsetzen der ersten Ableitung der Dehnungskoëffizient und danach der Elastizitätsmodul des Probestückes für unendlich kleine Spannungen zu

$$E_0 = 2\,005\,000^{kg}/\square^{cm}$$

sich berechnet.

Wie aus der nach diesem Ergebniss entworfenen Arbeitskurve (Fig. 2, Taf. V) erkennbar ist, zeigt der Elastizitätsmodul auch beim Stahl eine Abnahme mit wachsender Spannung, wie auch schon früher Professor Fischer a. a. O. gefunden hatte.[1]) Nimmt man an, dass die Gleichung der Arbeitskurve für die elastischen Dehnungen und ihre Ableitung bis zur Bruchbelastung verwendbar ist — das erscheint zulässig, weil deren Verwendung denselben Werth für die elastische Dehnung im Augenblicke des Bruches (0,005) liefert, wie ein von meinem Assistenten Baltabol ausgeführter direkter Versuch —, so ergiebt die Rechnung, dass der Elastizitätsmodul an der Bruchgrenze bis auf den Werth

$$E = 1\,667\,000^{kg}/\square^{cm}$$

herabsinkt; man erfährt bei dieser Gelegenheit, dass das letzte Glied des gewählten Ausdruckes ohne Einfluss ist, nicht auf die letzte Ziffer dieser Zahl einzuwirken vermag.

Die entsprechenden, von demselben Beobachter gefundenen Zahlen für einige andere (hartgezogene) Drähte verdienen hier angemerkt zu werden:

	E_0	s
Messing . . .	1 037 000	8,42
Silber . . .	849 000	10,00
Kupfer . . .	1 289 000	8,99

Bleibende Streckungen waren bei den (nur bis $1{,}88^{kg}$ belasteten Drähten) nicht erkennbar gewesen.

Ein ähnliches Verhalten, wie der Phosphorbronzedraht, zeigt die Rohseide, mit welcher Ernst Müller, jetzt Professor an der technischen Hochschule in Hannover, mit denselben Instrumenten wie Fischer eine entsprechende Untersuchung durchführte (Civilingenieur, Jahrg. 1882, S. 631, Taf. XXIII). Das Material kann als Typus eines natürlichen homogenen Festkörpers gelten, bei welchem der elastische Antheil der gesammten Dehnung verhältnissmässig gross ist; derselbe durchläuft von der Elastizitätsgrenze bis zur Bruchgrenze die Werthe zwischen 1 und 0,567. Müller brauchte die besondere (nur für das das Gesetz der bleibenden Streckungen erforderliche) Vorsicht, die für eine Auswahl verschiedener Spannungswerthe erforderlichen Be- und Entlastungsversuche mit je einem neuen Probestücke durchzuführen. Aus der auf Seite 638 der betreffenden Veröffentlichung mitgetheilten Tabelle entnehme ich folgende zusammengehörige, bis zur Bruchgrenze reichende Werthe von ε und σ, aus denen ich nach

$$E = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon}$$

die beigesetzten Werthe des Elastizitätsmoduls berechnet habe:

Elastische Dehnung in $^1/_{1000}$ der Anfangslänge ε	Spezifische Spannung in Atmosphären σ[1])	Elastizitätsmodul $E^{kg}/\square^{cm}$
0	0	
9,74	1000	102 700
24	2462	100 000
30	2734	45 300
40	3101	36 700
48	3454	44 100
55	3713	106 000
67	4148	36 300
75	4447	37 400
77	4488	20 500
82,5	4760	49 400

Von den Unregelmässigkeiten im 6. und 10. Spannungsintervall abgesehen, die bei Verwendung eines einzigen Probestückes wohl nicht aufgetreten sein würden, erkennt man auch hier eine deutliche Abnahme von E nach Ueberschreitung einer spezifischen Belastung, die ungefähr die Hälfte der Bruchbelastung beträgt. Fig. 3, Taf. V, giebt die Arbeitskurve der elastischen Dehnungen nach erfolgter Ausgleichung. Dieselbe entspricht einer von Prof. Engesser gelegentlich gemachten Voraussetzung (vgl. Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover, Jahrg. 1889, S. 736, Fig. 2). Die „Elastizitätsgrenze" hat sich — wenn man so will — in zwei „Proportionalgrenzen" P und Q aufgelöst, von denen die zweite mit der Bruchgrenze zusammenfällt; vor der ersten ist der Elastizitätsmodul der Rohseide $E = 100\,000$, vor der zweiten $E' = 38\,500^{kg}/\square^{cm}$; von einem zum andern Werth findet ein stetiger Uebergang statt.

Von besonderem Interesse wird es sein, die Abhängigkeit des Elastizitätsmoduls von der spezifischen Beanspruchung für den Kautschuk zu prüfen, zunächst — was die technischen Verwendungen desselben am meisten berührt — für den vulkanisirten Kautschuk, bei dem der Einfluss mässiger Temperaturschwankungen ausser Acht gelassen werden kann. Bezüglich dieses Materials hat der verstorbene Prof. Emil Winkler im Jahrg. 1878 (S. 81) dieser Zeitschrift eine Beobachtungsreihe mitgetheilt, die sich auf Zug und Druck zugleich bezieht. Der vulkanisirte Kautschuk entstammte der Fabrik von Reithofer in Wien. In der nachfolgenden Uebersicht sind die bei Druckbeanspruchung erhaltenen Werthe durch das Minuszeichen erkennbar gemacht. Zur Berechnung von E sind die Werthe der spezifischen Spannungen vorerst so umgerechnet worden, dass man — unter Voraussetzung konstanten Volumens[2]) — die aus

1) Zur näheren Charakterisirung des hierbei verwendeten Stahldrahtes, von welchem Herr Prof. Kohlrausch die Güte hatte, dem Verfasser eine Probe zur Verfügung zu stellen, mag es dienen, dass derselbe bei einer spezifischen Belastung von $108{,}2^{kg}/\square^{mm}$ zerriss und im Augenblicke des Bruches eine Dehnung $\varepsilon = 0{,}013$ ergab, wovon $\varepsilon_b = 0{,}008$ bleibend, $\varepsilon_e = 0{,}005$ elastisch war; das benutzte Probestück hatte also einen Elastizitätsgrad von $\frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_e + \varepsilon_b} = 0{,}385$.

1) Bei Herleitung dieser Zahlen aus der Spannungslänge R^{km} ist das spezifische Gewicht der lufttrockenen Rohseide $s = 1{,}36$ angenommen worden, also $\sigma = 136 \cdot R$.

2) Die Physiker haben allerdings bei dem nicht vulkanisirten Kautschuk eine Volumensvergrösserung für Zug und eine Volumensverkleinerung für Druck beobachtet (vgl. Poggendorf's

der Dehnung sich ergebenden Querschnittsveränderungen berücksichtigt hat; diese Vorsicht scheint bei einem Material von so besonders grosser Dehnbarkeit rathsam und lässt die Veränderungen des Elastizitätsmoduls geringer erscheinen, als bei der sonst zulässigen Bezugnahme auf den ursprünglichen Querschnitt; die so erhaltenen Werthe sind mit σ' bezeichnet. Für die hier vorgeführten Spannungsgrenzen waren bleibende Gestaltsänderungen noch nicht erkennbar; die elastische Nachwirkung war einbezogen, jedoch ohne Angabe der zwischen Belastung und Ablesung verflossenen Zeit.

Relative Aenderung der Länge in $^1/_{1000}$ der Anfangslänge ε	Spezifische Spannung in Atmosphären σ	σ'	Elastizitätsmodul E at
— 198	— 3,0	— 2,406	17,5
— 173	— 2,5	— 2,068	13,9
— 147	— 2,0	— 1,706	11,8
— 115	— 1,5	— 1,328	12,4
— 82	— 1,0	— 0,918	9,48
— 36	— 0,5	— 0,482	13,4
0	0	0	10,1
52	0,5	0,526	7,46
137	1,0	1,14	5,91
264	1,5	1,89	6,81
396	2,0	2,79	7,61
698	3,0	5,00	7,90
1135	4,0	8,54	

Sieht man von den im Einzelnen erkennbaren Beobachtungsfehlern ab, die — in Uebereinstimmung mit allen anderweiten Erfahrungen — in der Nähe des spannungslosen Zustandes am grössten sind, so erkennt man eine deutliche Abminderung des Elastizitätsmoduls von dem zusammengepressten nach dem ausgestreckten Kautschukstabe. Diese Abminderung würde offenbar auch nicht verschwinden, wenn man etwa bei Beurtheilung der Dehnungswerthe statt der Anfangslänge des Probestückes die jeweilig erreichte neue Länge desselben einführen wollte.

Wäre die Theorie des molekularen Aufbaues der Festkörper schon befriedigend entwickelt, könnte man also die Funktionsform angeben, durch welche die Veränderlichen ε und σ mit einander verknüpft sind, so würde man eine Beobachtungsreihe der vorstehenden Art dazu verwenden können, den Werth des Elastizitätsmoduls für einen gewissen Spannungszustand (z. B. für $\sigma = 0$) genauer als hier gezeigt, nämlich unter Berücksichtigung aller Einzelbeobachtungen zu bestimmen, denn es ist sofort ersichtlich, dass unter Voraussetzung eines stetigen Verlaufes der Arbeitskurve, deren Gleichung

$$\sigma = f(\varepsilon)$$

heissen möge, die Abhängigkeit des Elastizitätsmoduls E von der spezifischen Spannung durch die erste Ableitung

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = f'(\varepsilon) = E$$

dargestellt wird; man braucht nur die bisher als endliche Grössen verwendeten Intervalle von Spannung und elastischer Dehnung unendlich klein werden zu lassen; der Elastizitätsmodul ist der erste Differentialquotient derjenigen Funktion, die der auf die Achse der Dehnungen gestellten Arbeitskurve entspricht, und ebenso ist der Dehnungskoëffizient $\left(\frac{1}{E}\right)$ die erste Ableitung derjenigen Funktion, die den Zusammenhang zwischen Spannung σ als unabhängiger und Dehnung ε als abhängiger Veränderlichen darstellt:

$$\alpha = \frac{1}{E} = \frac{d\varepsilon}{d\sigma}.$$

Bei unserer gegenwärtigen noch unvollkommenen Erkenntniss der inneren Natur der Baustoffe bleibt nur übrig, versuchsweise Funktionsformen einzuführen, um deren Anschluss an die zugänglichen Beobachtungsreihen zu prüfen.

Für den natürlichen Kautschuk liegt — für den Fall konstanter Temperatur — ein Vorschlag vor, der annehmbar erscheint und hier auf den vulkanisirten Kautschuk angewendet werden soll. Derselbe findet sich in einer kleinen Druckschrift:

A. Imbert, Recherches théoriques et expérimentales sur l'élasticité du caoutchouc. Lyon 1880,

worin auf S. 47—50 auf Grund einer geometrischen Betrachtung der Nachweis geführt wird, dass unter Bezugnahme auf ein rechtwinkeliges Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt um die Länge 1 des Probestückes von dem Nullpunkt der Arbeitskurve nach der negativen Seite auf der Achse der Dehnungen verschoben gedacht wird, der Zusammenhang zwischen σ und ε durch die Exponentialfunktion anschliessend dargestellt werden könne. Lassen wir jedoch den Anfangspunkt des Koordinatensystems mit dem Nullpunkte der Kurve zusammenfallen, so würde der Imbert'sche Vorschlag zu der Gleichung

$$\varepsilon = e^{m\sigma} - 1$$

führen, worin e die Basis der natürlichen Logarithmen und m eine für die verwendete Kautschuksorte charakteristische Konstante bedeutet.

Um die Tauglichkeit dieser Funktionsform zu prüfen, setzen wir die oben aufgeführten Sonderwerthe von ε und σ' ein und berechnen nach

$$m = \frac{1}{\sigma} \cdot l\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)$$

die Konstante m. Das Ergebniss zeigt folgende Uebersicht:

ε	σ'	m
— 0,198	— 2,41	0,0915
— 0,173	— 2,07	0,0788
— 0,147	— 1,71	0,0930
— 0,115	— 1,33	0,0911
— 0,082	— 0,918	0,0932
— 0,036	— 0,482	0,0760
0,052	0,526	0,0947
0,137	1,14	0,1115
0,264	1,89	0,1230
0,396	2,79	0,1190
0,698	5,09	0,1040
1,135	8,54	0,0890

Annalen, Bd. 78, S. 381). Indessen sind diese Erscheinungen ihrem Betrage nach nicht erheblich genug, um für den vorliegenden Zweck in Betracht gezogen werden zu müssen; auch sind dieselben meines Wissens für den vulkanisirten Kautschuk und für höhere Spannungen noch nicht näher untersucht worden.

Man kann sich — im Hinblick auf die ohne feinere Messinstrumente ausgeführte Untersuchung — mit der Uebereinstimmung zufrieden geben; das arithmetische Mittel der berechneten 12 Werthe ist 0,0971, wofür wir abgerundet

$$m = 0{,}10 = {}^1/_{10}$$

setzen wollen.

Danach würde das vollständige Arbeitsdiagramm des hier verwendeten geschwefelten Kautschuks durch die Gleichung

$$\varepsilon = e^{\frac{\sigma}{10}} - 1$$

oder nach σ aufgelöst durch

$$\sigma = 10 \,.\, l(1 + \varepsilon)$$

dargestellt sein. Durch Differentiation der letzteren findet sich alsdann der Elastizitätsmodul, als Funktion der relativen Dehnung

$$E = \frac{10}{1 + \varepsilon},$$

so dass für den spannungslosen Zustand ($\varepsilon = 0$) der genauere Werth

$$E_0 = 10\,{}^{kg}/_{\square^{cm}}$$

sich berechnet.

Man kann aus der zu Grunde gelegten Gleichung der Arbeitskurve

$$\varepsilon = e^{m\sigma} - 1$$

auch diejenige Funktion herleiten, die den Elastizitätsmodul in seiner Abhängigkeit von σ — der spezifischen Spannung — darstellt. Es folgt nämlich

$$m\sigma = l(\varepsilon + 1),$$

sowie

$$m \,.\, d\sigma = \frac{d\varepsilon}{\varepsilon + 1}, \qquad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{1}{m(\varepsilon + 1)}$$

und wegen $\varepsilon + 1 = e^{m\sigma}$:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{1}{m \,.\, e^{m\sigma}} \quad \text{oder} \quad E = \frac{1}{m \,.\, e^{m\sigma}},$$

in unserem besonderen Falle also

$$E = \frac{10}{e^{\frac{\sigma}{10}}}.$$

Es ist hiernach der Elastizitätsmodul des geraden Stabes aus vulkanisirtem Kautschuk mit der relativen Dehnung ε und daher auch mit der spezifischen Spannung σ so verknüpft, dass er vom spannungslosen Zustande nach der Seite der Zugbeanspruchung stetig abnimmt, nach der Seite der Druckbeanspruchung stetig wächst. Für $\varepsilon = -1$ wird $\sigma = \infty$ und $E = \frac{10}{0} = \infty$, ein Grenzfall, der offenbar praktisch nicht zu verwirklichen ist, denn man wird die Dicke eines Festkörpers nicht bis auf Null vermindern können. Figur 4 auf Tafel V giebt die nach Gleichung

$$\sigma = 10 \,.\, l(1 + \varepsilon)$$

berechnete Arbeitskurve für die von Winkler zunächst festgehaltenen Belastungsgrenzen, innerhalb deren sich bleibende Formänderungen noch nicht einstellten. Die hier dargestellte Linie mag für das ideale Gesetz angenommen werden können, dem sich der durch Belastungsversuche feststellbare Zusammenhang zwischen Dehnungen und Spannungen — bei konstanter Temperatur — nähert; dass dieser Zusammenhang beim Uebergang von Zug zu Druck eine Unstetigkeit nicht aufweist — die Arbeitskurve hat im Punkte $\sigma + 0$, $\varepsilon = 0$ nur eine Tangente —, wird aus Gründen allgemeiner Art ansprechend erscheinen.

Ueber die Elastizität von Treibriemen und Treibseilen veröffentlichte Prof. Bach im Jahrg. 1887 (S. 221) der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure eine sehr eingehende Untersuchung, als deren Hauptergebniss hier in Betracht kommt, dass für Riemen und Seile der Elastizitätsmodul mit wachsender Spannung zunimmt. Von den hier mitgetheilten besonderen Versuchsergebnissen will ich die auf einen neuen (lohgaren) Lederriemen bezüglichen einer näheren Betrachtung unterziehen.

Die Versuchslänge des Riemens betrug, wie ich aus seinem Verhalten bei den ersten Anspannungen erschliesse, 935^{mm}, der Querschnitt $0{,}67 \,.\, 9{,}94 = 6{,}66\,\square^{cm}$. Derselbe wurde zunächst viermal auf 250^{kg} angespannt und auf 100^{kg} entlastet; den hier gewonnenen Beträgen an bleibenden und elastischen Dehnungen lege ich ein besonderes Gewicht nicht bei, weil durch die nachfolgenden stärkeren Beanspruchungen das Probestück in viel stärkerem Maasse dem vollkommen elastischen Zustande näher gebracht wurde. Diese stärkeren Beanspruchungen bestanden in vier Belastungen auf 400^{kg} ($\sigma_2 = 30\,{}^{kg}/_{\square^{cm}}$) und vier nachfolgenden Entlastungen auf 250^{kg} ($\sigma_1 = 18{,}75\,{}^{kg}/_{\square^{cm}}$), aus denen sich bleibende Streckungen von

$$\frac{1}{164}, \quad \frac{1}{2338}, \quad \frac{1}{4675}, \quad \frac{1}{9350}\ ^{1})$$

der Anfangslänge ergaben; ich betone die schnelle Abnahme der bleibenden Streckungen, um damit die Auffassung zu begründen, dass das Probestück — innerhalb der hier wiederholt erreichten spezifischen Spannung von $\sigma_2 = 30^{at}$ — schon durch eine kleine Zahl von Anspannungen dem Zustande vollkommener Elastizität ungemein schnell genähert wird; man kann daher die relative Ausdehnung bei der letzten Anspannung

$$\Delta\varepsilon = \frac{6{,}0}{935} = 0{,}006417$$

schon als vollkommen elastisch ansehen, um daraus und aus dem entsprechenden Spannungsintervall

$$\Delta\sigma = 30 - 18{,}75 = 11{,}25\,{}^{kg}/_{\square^{cm}}$$

den Elastizitätsmodul

$$E = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} = \frac{11{,}25}{0{,}00642} = 1735$$

zu berechnen.

Bach hat einen etwas höheren Werth (1890) erhalten, indem er einmal statt der Ursprungslänge (935^{mm}) die mittlere Länge des Probestückes bei 250^{kg} Belastung und sodann als elastischen Antheil der Streckung den

1) Dieser letzte Werth, der in der benutzten Abhandlung fehlt, ist auf Grund meiner eigenen Erfahrungen abgeschätzt und hier eingefügt worden.

mittelst der ersten Entlastung gefundenen Werth (5,8 mm) verwendete; beides will mir nicht gerechtfertigt erscheinen; das erste nicht, weil mir die bleibende Streckung wie eine blosse Begleiterscheinung der elastischen Dehnung dünkt, die man daher für Merkmale des elastischen Verhaltens nicht weiter in Rechnung ziehen sollte, das zweite nicht, weil wir doch den Elastizitätsmodul immer auf den Belastungsvorgang, nicht auf den Entlastungsvorgang bezogen wissen wollen. Die Bezugnahme des einem gewissen Zuwachs der spezifischen Spannung entsprechenden Zuwachses der elastischen Dehnung auf die aus zwei Ursachen veränderliche Länge des Probestückes führt sogar, wie Köpcke gezeigt hat[1]), auf logisch nicht annehmbare Konsequenzen, deren volle Beseitigung erst durch Zulassung eines veränderlichen E und Auffassung des Zuwachses der elastischen Dehnung als Differential nur der elastischen (nicht auch der bleibenden) Verlängerung ε des von der Länge 1 gedachten Probestückes vollständig gelingt. Der Vorgang der elastischen Dehnung muss in der wissenschaftlich exakten Untersuchung von dem der bleibenden Streckung vollständig geschieden werden.

Nach diesen Versuchen erfolgten nun noch zwei Belastungen desselben Riemens auf 250 kg ($\sigma_2 = 18{,}75$ at) und Entlastungen auf 100 kg ($\sigma_1 = 7{,}5$ at), die nur noch eine bleibende Streckung von

$$\frac{1}{9350}$$

der Anfangslänge und eine (als vollkommen elastisch anzusehende) relative Streckung von $\Delta\varepsilon = \frac{7{,}5}{935} = 0{,}00\,802$ bei der letzten Zugbelastung um $\Delta\sigma = 11{,}25\ ^{kg}/_{\square^{cm}}$ ergaben, so dass für das Spannungsintervall von 7,5 bis 18,75 at der Elastizitätsmodul $E = \frac{11{,}25}{0{,}00802} = 1402$ sich ergiebt. Auch hier erhielt Bach einen etwas höheren Werth (1450).

Hiernach wollen wir die nachfolgenden vier paarweise zusammengehörigen Werthe für einen neuen aus lohgarem Rindsleder hergestellten neuen Treibriemen als zuverlässig erachten:

Spezifische Spannung (Mittelwerth des Spannungsintervalls) σ at	Elastizitätsmodul E
13,13	1402
24,38	1735

Diese vier Werthe, deren Zuverlässigkeit ausser Zweifel steht, würden zur Bestimmung von zwei Gleichungskonstanten ausreichen. Nehmen wir z. B. an, dass der Elastizitätsmodul durch eine lineare Funktion mit der spezifischen Spannung verknüpft sei, setzen also

$$E = a + b\,.\,\sigma,$$

so berechnet sich unter Benutzung vorstehender vier Sonderwerthe

$$a = 1013 \text{ und } b = 29{,}6,$$

wonach

$$E = 1013 + 29{,}6\,.\,\sigma.$$

1) Deutsche Bauzeitung 1882, S. 164 und 460.

Diese Gleichung könnte dazu benutzt werden, den Werth von E für sehr kleine Anspannungen (für $\sigma = 0$), dessen direkte Bestimmung erfahrungsgemäss unsichere Werthe liefert, zuverlässig zu bestimmen; es ergäbe sich

$$E_0 = 1013\ ^{kg}/_{\square^{cm}},$$

ein Werth, der zwischen die Angaben von Grashof (1500 [1])) und Keller (600 [2])) fällt, und den man für die Elastizitätsuntersuchungen wohl auf 1000 abrunden wird.

Auch für jeden anderen Spannungszustand solcher Riemen wird man einen guten Näherungswerth des Elastizitätsmoduls angeben können. Nimmt man als Werth der Bruchbelastung $K_z = 350$ at an (vgl. die Bach'schen Versuche im Jahrg. 1884 der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, S. 741), so ergiebt sich als höchster möglicher Werth des Elastizitätsmoduls

$$E_z = 1013 + 29{,}6\,.\,350 = 11\,373.$$

Ein ähnliches Anwachsen von E gegen den Bruch hin ist für alle undichten, nicht homogenen Stoffe zu vermuthen.

Aus der hier angenommenen (selbstverständlich nur angenähert zutreffenden) Funktionsform für den Elastizitätsmodul

$$E = a + b\,.\,\sigma$$

lässt sich nun weiter auch auf die Gestalt der Arbeitskurve für die nur elastischen Dehnungen schliessen; denn da wir wissen, dass der Elastizitätsmodul die Ableitung dieser Kurve ist, wenn man die elastischen Dehnungen als unabhängig Veränderliche ansieht, so ergiebt sich

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = a + b\,\sigma$$

als Differentialgleichung derselben, deren Integration das Ergebniss

$$\int_0^{\sigma} \frac{d\sigma}{a + b\,\sigma} = \int_0^{\varepsilon} d\varepsilon + C$$

oder

$$\frac{1}{b} \cdot [l(a + b\,\sigma) - l\,a] = b\,\varepsilon + C$$

oder wegen $C = 0$ aus $\varepsilon = 0$ und $\sigma = 0$

$$l\left(1 + \frac{b}{a}\,\sigma\right) = b\,.\,\varepsilon$$

liefert; reduzirt man diese Gleichung auf σ, so folgt

$$\sigma = \frac{a}{b}\,(e^{b\varepsilon} - 1)$$

1) Wohl nach Kretz, der bei seinen Untersuchungen über die Elastizität im Arbeitsgange der Maschinen den Werth $E = \frac{1}{0{,}0007} = 1430$ zu Grunde legte (vgl. Mémoires présentés par divers savants à l'académie des sciences de l'institut national de France, T. XXII, Nr. 15).

2) Vielleicht nach Bevan, dessen im Jahre 1825 ausgeführte Versuche mit Rindsleder (Dingler's polyt. Journal, Bd. 16, S. 263) — allerdings noch ohne Ausscheidung der bleibenden Verlängerungen — den auffallend niedrigen Werth von $E = 550$ ergaben. Auch Autenheimer (zur Theorie der Transmission vermittelst endloser Riemen und Seile, Programm der Gewerbeschule Basel 1860/61) fand auf Grund eigener Beobachtungen und unter Begehung desselben Fehlers für kleine Beanspruchungen (bis $\sigma = 3{,}61$ at) einen ähnlich niedrigen Werth $E = 697\ ^{kg}/_{\square^{cm}}$.

als Gleichung der Arbeitskurve für die elastischen Dehnungen, die für unseren Sonderfall nach Einsetzen der berechneten Konstanten die Gestalt

$$\sigma = 34{,}2\,(e^{29{,}6\cdot\varepsilon} - 1)$$

annimmt; dieselbe liefert z. B. für

$$\varepsilon = 0{,}02 \qquad \sigma = 27{,}4$$
$$\varepsilon = 0{,}05 \qquad \sigma = 115{,}9$$
$$\varepsilon = 0{,}08 \qquad \sigma = 330{,}2;$$

Fig. 5 unserer Tafel zeigt die Gestalt dieser Kurve, wie sie aus dem vollständigen Dehnungsdiagramme unter Ausscheidung der bleibenden Streckungen (mittelst der Methode der Entlastungen) hergeleitet werden könnte.

Man kann noch die Frage aufwerfen, in welcher Art der Elastizitätsmodul von der relativen (elastischen) Dehnung abhängig ist; man erhält durch Differentiation der Gleichung

$$\sigma = \frac{a}{b}\,(e^{b\varepsilon} - 1),$$

$$E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = a\,.\,e^{b\varepsilon},$$

also für den hier behandelten besonderen Fall

$$E = 1013\,.\,e^{29{,}6\cdot\varepsilon}.$$

Auf eine einfache Integrationsaufgabe würde es endlich hinauslaufen, wenn etwa der den elastischen Ausdehnungen entsprechende Betrag der spezifischen (d. h. auf die Volumens- oder die Gewichtseinheit des Materials reduzirten) Zerreissarbeit berechnet werden sollte.

Als ein Gegenstück zu dem Leder, für welches die Beanspruchung auf Zugkräfte praktisch überwiegende Bedeutung hat, soll zunächst der Kork, die Rinde der Korkeiche, in ihrem Verhalten gegen Druckkräfte betrachtet werden; das Material vereinigt gewisse Eigenschaften, die das Experimentiren damit lehrreich machen.

Ich verwendete einen Kreiszylinder von lufttrockenem Flaschenkork von 2,52 cm Höhe und 6,895 □ cm Querschnitt, der in der Gleichmässigkeit des Zellenbaues nahezu fehlerfrei war; das Raumgewicht ergab sich (aus Gewicht und nach den Abmessungen ermitteltem Volumen berechnet) zu 0,127. Derselbe wurde zunächst dreimal von 10[1]) auf 100 kg ($\sigma = 14{,}5$ at) in der Richtung der Stammachse belastet und wieder entlastet, wobei sich die Höhenverminderung ergab, bei der

	1.	2.	3. Entlastung
zu	$\frac{1}{4{,}42}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{50}$ der Höhe,

womit auch bei diesem Material die schon bei anderen weichen Stoffen gemachte Wahrnehmung sich bestätigt, dass die Ausscheidung der einem gewissen Beanspruchungsgrad entsprechende bleibende Antheil der Formänderung schon durch eine mässige Anzahl von wirklichen Belastungen bis zu dem betreffenden Betrag hervorgerufen, für die weitere Untersuchung also ausgeschieden werden kann, oder — anders ausgedrückt — dass das Probestück für das wiederholt durchlaufene Spannungsintervall vollkommen elastisch gemacht wird; schon die erste Belastung hat diesen Erfolg angenähert erreicht, denn die bleibende Höhenverminderung nach der zweiten Entlastung beträgt schon kaum $^1/_{10}$ von der nach der ersten; das Ergebniss ist gewöhnlich in der Form ausgesprochen worden, dass die Grenze der vollkommenen Elastizität (z. B. bei einem weichen Stahldrahte) auf die jeweilige höhere Belastung höher gelegt wird; aber der Kork zeigt, wie die meisten nicht schon auf Druck oder Zug beanspruchten Stoffe zunächst keine Grenze der vollkommenen Elastizität; diese wird erst durch die Beanspruchung herbeigeführt, allerdings nur für kurze Zeit, denn der Kork zeigt — worauf, wie auf seiner Weichheit, seine Brauchbarkeit zum Verschluss von Flaschen beruht — in ausgezeichnetem Grade die Erscheinung der elastischen Nachwirkung, wohl infolge der in den Zellen eingeschlossenen Luft: das vorliegende Probestück, das nach wiederholter Belastung auf 1000 kg ($\sigma = 145$ at) seine Höhe um 10,9 mm = 0,432 des Anfangsbetrages vermindert zeigte, ergab 36 Stunden später einen Wiederzuwachs seiner Höhe um 9,6 mm = 0,381 dieses Anfangsbetrages. Die Erscheinung, deren gänzlichen Ablauf man für Zwecke vorliegender Art nicht abwarten kann, lässt es rathsam erscheinen, die Versuche über Zusammenhang zwischen spezifischer Spannung und zugehöriger elastischer Stauchung oder Dehnung in rascher Folge durchzuführen und lediglich — also unter Ausscheidung der elastischen Nachwirkung — die unmittelbar bei Eintritt einer gewissen Spannung erkennbare Längenänderung in Betracht zu ziehen. Der Verfasser hat sich dies nach vielen vergeblichen Versuchen, die elastische Nachwirkung in einer annehmbaren Form einzubeziehen, zur Regel gemacht[1]), wie er anderseits die aus vielfachen Wahrnehmungen geschöpfte Regel befolgte, jeder Bestimmung des Elastizitätsgesetzes für ein gewisses Spannungsintervall mindestens eine Durchlaufung dieses Intervalles im Sinne von Be- und Entlastung unmittelbar vorhergehen zu lassen.

Demgemäss war der vorbezeichnete Korkzylinder nach zweimaliger stetiger Belastung auf 500 kg, zweimal langsam auf 1000 kg belastet worden, unter gleichzeitiger Beobachtung der Verkürzungen, durch direkte Messung mit der Schublehre bis 500 kg, mittelst des Spiegelapparates über 500 kg; die nun als nur elastisch angesehene Höhenverminderung betrug (von 1,56 cm ausgehend) für das Spannungsintervall

$$10 - 500\ \text{kg} \quad 1{,}220\ \text{cm},$$
$$500 - 1000\ \text{kg} \quad 0{,}029\ \text{cm}.$$

Bezieht man die auf Länge 1 reduzirten Stauchungen ε auf die Anfangslänge des nicht vorher belastet gewesenen Probestückes ($l = 2{,}52$ cm), die spezifische Spannung σ wie

1) Die Angaben des Messapparates für die Spannung Null sind immer unsicher; die praktische Entscheidung, ob z. B. ein auf Druck zu prüfender Würfel schon berührt, aber noch nicht gedrückt wird, ist praktisch unmöglich, die vollständige Entlastung würde (bei horizontaler Richtung des Belastungsdruckes) die Lage des Probestückes gefährden, endlich würden die Beobachtungen von σ und ε um deswillen unsicher werden, weil man zwar die Reibung der Bewegung beliebig abmindern, nicht aber zugleich die Reibung der Ruhe gleich Null machen kann.

1) Zu demselben Entschluss kam O. Thompson in der Studie: „Ueber das Gesetz der elastischen Dehnung". Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie 1891, S. 555.

bisher auf den Quadratcentimeter, so ergeben sich — nach Ausscheidung derjenigen Formänderungen, die den am Vorgange betheiligten Bestandstücken des Apparates zukommen — die nachfolgenden zusammengehörigen Werthe, denen noch die den einzelnen Intervallen entsprechenden nach

$$E = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon}$$

berechneten Werthe des Elastizitätsmoduls beigefügt sind; derselbe zeigt eine rapide Erhöhung mit Zunahme von σ

ε	σ	E
0,4325	14,5	
		456
0,4643	29,0	
		1835
0,4722	43,5	
		2437
0,4841	72,5	
		6042
0,4889	101,5	
		6493
0,4956	145	

Die aus den Koordinaten ε und σ entworfene Kurve macht den Eindruck, dass sie einer im Abstande 1 auf der Achse der ε errichteten Normalen sich asymptotisch nähert; eine Hyperbel von entsprechender Lage, an die man zunächst denken könnte, etwa von der Form

$$\sigma = -m \cdot \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

erweist sich nicht als schmiegsam genug, um den Zusammenhang darzustellen; ich lege deshalb und weil wir wissen, dass die Kurve durch den Anfangspunkt des Koordinatensystems gehen muss, versuchsweise eine andere Funktionsform zu Grunde, die beiden Forderungen sicher entspricht; ich setze

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot e^{m\varepsilon}$$

und bestimme die hier eingeführte Konstante m nach

$$m = \frac{1}{\varepsilon} \cdot l\left(\sigma \cdot \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right).$$

Der aus den Versuchswerthen erzielte Werth schwankt zwischen 6,77 und 10,08; ich wähle in überwiegender Berücksichtigung der bei den höchsten Spannungen gefundenen Zahlen, die ich für am zuverlässigsten halte,

$$m = 10,$$

so dass als Gleichung des Arbeitsdiagrammes der elastischen Stauchungen des Korkgewebes sich

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot e^{10\cdot\varepsilon}$$

ergiebt.

Für den Elastizitätsmodul ergiebt sich durch Differentiation allgemein die Gleichung

$$E = \frac{(m+1)\cdot e^{m\varepsilon}}{(1+\varepsilon)^2},$$

für $m = 10$ sonach

$$E = \frac{11\cdot e^{10\varepsilon}}{(1+\varepsilon)^2},$$

eine Gleichung, die nun den nicht wohl direkt zu beobachtenden Werth des Elastizitätsmoduls für den spannungslosen Zustand (oder für sehr kleine Stauchungen) zu

$$E_0 = 11\ {}^{kg}/_{\square^{cm}}$$

berechnen lässt. Fig. 6 auf Taf. V giebt ein Bild der entsprechenden Kurve. Für eine elastische Verkürzung des Korkstabes um $\varepsilon = 0{,}50$ der Höhe desselben im unbelasteten Zustande erhält man nun die spezifische Spannung

$$\sigma = e^5 = 148{,}4\ {}^{at}$$

und den Elastizitätsmodul zu

$$E = \frac{11\cdot e^5}{1{,}5^2} = 6595\ {}^{kg}/_{\square^{cm}}.$$

Mit der Zunahme von σ und E ergiebt sich, wie bei allen porösen Stoffen, eine Verkleinerung des direkt messbaren Volumens, also eine Zunahme des Raumgewichtes; dasselbe war von 0,127 vor Beginn der Versuche auf 0,193 unmittelbar nach Beendigung derselben gewachsen.

Nach den vorstehend mitgetheilten Beobachtungen unterliegt es keinem Zweifel, dass man sich den Elastizitätsmodul des ziehend oder drückend beanspruchten geraden Stabes als eine mit dessen Spannungszustand veränderliche Grösse vorzustellen hat; der Begriff der vollkommenen Elastizität ist sonach allgemeiner als der des konstanten Verhältnisses zwischen Spannung und Dehnung; er umschliesst auch den Fall des veränderlichen Verhältnisses von σ und ε, von welchem die gewöhnlich gemachte Voraussetzung ein in der Wirklichkeit nur für kleine Längenänderungen näherungsweise zutreffender Sonderfall ist.

Ich komme nun zu unserem viel verwendeten Konstruktionsmaterial Gusseisen, von dem ich schon in der Einleitung sprach, dessen Verhalten bei Zug- und Druckbeanspruchung schon früher einen von der spezifischen Spannung unabhängigen Werth für E unannehmbar erscheinen liess; die letzten zwei Auflagen des Taschenbuches „Hütte" enthalten (nach Bach[1]) in der Tabelle der Elastizitäts- und Festigkeitskoëffizienten bei Gusseisen unter E die Bemerkung: „Nimmt ab mit Zunahme der Dehnung." Die Frage, nach welcher Funktion, liegt nahe. Die Versuchsreihen, die bis zur Bruchgrenze reichen und bei denen mittelst wiederholter Entlastungen die auftretenden unvergänglichen Streckungen und Stauchungen zuverlässig ausgeschieden wurden, sind nicht zahlreich; ich habe in der mir zugänglichen Literatur nur zwei auffinden können und diese beschränken sich auch nur auf die Beanspruchung durch Zug. Die eine rührt von dem französischen Oberstlieutenant Bubbe in Bourges her und wurde von Considère in dessen Buch über die Anwendung von Eisen und Stahl bei Konstruktionen veröffentlicht, vgl. die deutsche Uebersetzung von Emil Hauff (Wien 1888, S. 76, Tabelle Nr. 3). Die zusammengehörigen Werthe der elastischen Dehnung ε und der spezifischen Zugspannung σ, sowie der daraus hergeleiteten Einzelwerthe giebt folgende Uebersicht:

1) Bach, Maschinenelemente, S. 34. 2. Aufl.

Relative Streckung ε in $\frac{1}{10^5}$ der Stablänge	Spezifische Spannung in Atm.	Elastizitätsmodul $E^{kg}/\square^{cm}$
0	97	
10	194	97 000
30	291	98 500
50	388	48 500
70	485	48 500
103	582	29 400
150	679	20 600
170	776	48 500
200	873	32 300
250	970	19 400
310	1067	16 200
350 (geschätzt)	1130 (Bruch)	15 800

Die Betrachtung der für E berechneten Zahlenreihe lässt auf eine mangelhafte Beobachtungsmethode schliessen, über deren Einzelheiten nichts mitgetheilt wird; nur so viel ist sicher, dass der Elastizitätsmodul mit wachsender Dehnung und Spannung rasch abnimmt.

Die andere leider auch nur für die Zugfestigkeit genügend vollständige Untersuchung über das elastische Verhalten des Gusseisens findet sich in einem Sonderdrucke aus der New York Railroad Gazette:

R. H. Thurston, Salisbury iron. Its Composition, Qualities and Uses. Salisbury, Connecticut, U. S. A. 1878.

Die Versuche, die in dem technologischen Institute zu Hoboken ausgeführt wurden, beziehen sich auf ein hartes und ein weiches graues Gusseisen; die folgenden Angaben betreffen die weiche Art, die den höchsten Werth der Bruchdehnung (0,006 der Stablänge) ergeben hat; die Versuchsstäbe hatten eine Länge von 15,24 cm und einen Querschnitt von 3,24 □cm; die Ergebnisse sind (auf S. 21 des Sonderdruckes) in graphischer Form mitgetheilt, so dass eine Ausgleichung der nach wiederholten Entlastungen gewonnenen Einzelwerthe beim Entwurfe der Arbeitsdiagramme erfolgen konnte. Die Arbeitskurve der nur elastischen Dehnungen ist zwar nicht unmittelbar zu ersehen, sie lässt sich aber aus derjenigen für die gesammten Dehnungen und der für die bleibenden Dehnungen (the permanent set) mit geringer Mühe herleiten; ich habe sie in Fig. 7, Taf. V, nebst der von Considère mitgetheilten dargestellt. Die starke Abnahme des Elastizitätsmoduls mit wachsender Spannung ist bei beiden ausser Zweifel.

Von grösserem Interesse als das Verhalten gegen Zugkräfte ist uns bei dem Gusseisen aber das Verhalten gegen Druck; hier versagen aber die mir zugänglichen Quellen. Das tabellenreiche Werk von William G. Kirkaldy: „Illustrations of David Kirkaldy's System of mechanical testing as originated and carried on by him during a quarter of a Century. London 1891" berichtet zwar über Versuche mit 44 Gusseisensorten, enthält aber keinerlei Arbeitskurven. Die werthvollen, auf Zug- und Druckbeanspruchung zugleich bezüglichen Versuche Bauschinger's (20. Heft der Mittheilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der Königl. Technischen Hochschule in München, S. 25, Taf. XII) ergeben leider nur die vollständigen Arbeitskurven, gehen auf die erforderliche Ausscheidung der bleibenden Längenänderungen der Versuchskörper nicht näher ein. Sofern aus dem Verlaufe dieser Kurven ein Schluss auf die Gestalt der Diagramme für die nur elastischen Dehnungen zulässig ist, wäre zu vermuthen, dass auch bei Einwirkungen von Druckkräften der Elastizitätsmodul mit wachsender Spannung abnimmt. Gleichwohl bin ich hierüber im Zweifel.

Wenn ich die von Prof. Bach ausgeführten Versuche über Biegungsfestigkeit von Gusseisenstäben von rechteckiger Querschnittsform und verschiedenem Verhältniss zwischen Breite und Höhe (Zeitschrift des Vereins der deutschen Ingenieure 1888, S. 224) nach einem von Melan (Wochenschrift des Oesterr. Ingenieur- und Architekten-Vereins 1890, S. 223) vorgeschlagenen Verfahren dazu verwende, dass ich das Verhältniss μ der Elastizitätsmoduli für Druck und Zug berechne, so erhalte ich für die betreffende Verhältnisszahl einen um 40 Prozent höheren Werth für die Stäbe von der dreifachen Querschnittshöhe, einen Unterschied, den ich mir bei gleichzeitiger Abnahme der Elastizitätsmoduli für Zug und Druck nicht wohl erklären kann.

Obwohl ich nur über eine Maschine für die Maximalbelastung von 1500 kg verfüge, habe ich doch den Versuch gemacht, den vorliegenden Zweifel zu lösen. Es war zu dem Zwecke diese Maschine mit einem Spiegelapparat ausgestattet worden, der so eingefügt wurde, dass die Verkürzungen des Probekörpers auf das 400fache vergrössert wurden. Die so entstandene Einrichtung und die Art ihrer Benutzung gedenke ich demnächst in diesem Blatte zu veröffentlichen.

Ein Gusseisenprisma von 4,92 cm Höhe und $2{,}36 \cdot 2{,}35 = 5{,}54$ □cm Querschnitt ergab nach zweimaliger Belastung auf 500 kg eine dauernde Verkürzung seiner Länge bei der

	1.	2. Entlastung auf 100 kg
von	$\frac{1}{22\,160}$	$\frac{1}{27\,700}$,

die dritte Belastung auf denselben Betrag führte zu folgenden zusammengehörigen Werthen von $\Delta\varepsilon$ und $\Delta\sigma$:

$$\Delta\varepsilon = \frac{1}{13\,120}, \quad \Delta\sigma = 72{,}2\ ^{at},$$

woraus für das Beanspruchungsintervall von $\sigma = 18$ bis 90 at der Elastizitätsmodul dieses Gusseisenprismas sich ergiebt zu

$$E = 947\,000\ ^{kg}/\square^{cm}.$$

Die Belastung wurde sodann zweimal bis auf 1000 kg erhöht, wobei sich nach der ersten Entlastung eine weitere Verkürzung um

$$\frac{1}{13\,850}$$

der ursprünglichen Länge als bleibende Stauchung ergab; die letzte dieser Belastungen, für welche ein vollkommen elastisches Verhalten des Probestückes vorauszusetzen war, lieferte folgende Werthe, die dem Belastungsintervall von 500—1000 kg entsprechen:

$$\Delta\varepsilon = \frac{1}{12\,436}, \quad \Delta\sigma = 90{,}3\ ^{at},$$

daher für dieses höher liegende Intervall der Elastizitätsmodul zu

$$E = 1\,123\,000\ ^{kg}/\square^{cm}.$$

Dass der Elastizitätsmodul des grauen Gusseisens auf der Druckseite mit der spezifischen Belastung zunimmt, möchte ich hiernach ebenso sicher annehmen, wie ich von dessen Abnahme mit wachsender Zugbelastung überzeugt bin. Hätten wir schon eine auf beide Beanspruchungsweisen sich erstreckende Versuchsreihe mit einer gewissen Gusseisensorte, so würden wir das besondere Gesetz der Abhängigkeit des E von σ oder ε, das wohl durch den spannungslosen Zustand des Probestückes stetig verlaufen wird, herleiten können. Zur Zeit kenne ich nur zwei Einzelbeobachtungen, die den zu stellenden Anforderungen genügen, je auf ein und dasselbe Material sich beziehen, Zug und Druck betreffen und bei denen durch gehörige Vorherbelastung der bleibende Antheil der Längenänderung ausgeschieden ist. Diese Beobachtungen sind in dem Jahrgange 1886/87 der Proceedings of the Institution of Civil Engineers in London veröffentlicht und danach in einem Sonderabdrucke:

Kennedy, the use and equipment of Engineering Laboratories. London 1886.

Auf Seite 34 dieses Sonderabdruckes wird eines von Unwin erfundenen Instrumentes gedacht (beschrieben im Jahrg. 1886 des Journal of the Society of Arts), das die Ausscheidung des jedem Belastungsgrad eines auf Zug oder Druck beanspruchten Probestabes entsprechenden Betrages an bleibender Dehnung oder Stauchung gestattet, und als Beispiel der zuverlässigen Wirkung dieses Instrumentes giebt Kennedy auf Seite 38 ein Diagramm, das für einen Stab von grauem Gusseisen, 25,4 cm lang, 2,85 □cm Querschnitt, je zwei zusammengehörige Werthe von relativer elastischer Längenänderung und spezifischer Spannung für Zug und Druck entnehmen lässt, wie auch den zugehörigen Betrag an bleibender Längenänderung nach Maassgabe einer dem Versuche unmittelbar vorhergegangenen Belastung des Probestückes bis zu derselben Spannung. „In any case the first set of measurements should never be taken as giving data for calculation of modulus of elasticity" bemerkt der Verfasser zutreffend. Die anscheinend zuverlässigen Werthe, die man als Koordinaten der Arbeitskurve der elastischen Dehnung und Stauchung des betreffenden Gusseisens anzusehen hat, sind in den hier verwendeten Einheiten:

a) für die Zugbeanspruchung

$$\varepsilon = \frac{96}{10^5}, \quad \sigma = 966 \text{ at};$$

b) für die Druckbeanspruchung

$$\varepsilon = -\frac{134}{10^5}, \quad \sigma = -1620 \text{ at}.$$

Der Punkt a liegt ungefähr bei 0,6 der für Zug überhaupt möglichen Belastung, der Punkt b bei 0,3 der Bruchbelastung für Druck; man hätte also mit Einrechnung des dem spannungslosen Zustand entsprechenden Nullpunktes drei sichere Punkte zur Verzeichnung der vollständigen — Zug- und Druckseite umschliessenden — Arbeitskurve des grauen Gusseisens. In einer geraden Linie liegen die drei Punkte nicht; vielmehr zeigt eine graphische Darstellung, dass ein stetiger Kurvenzug durch dieselben zu legen wäre, der auf der Zugseite die konkave, auf der Druckseite die konvexe Seite der Achse der Dehnungen zukehrt, dessen Tangente gegen diese Achse den grössten Neigungswinkel an der der grössten Druckbelastung entsprechenden Stelle, den kleinsten an dem Kurvenpunkte der grössten Zugbelastung aufweist.

Man kann hierdurch — in Ermangelung genauerer Erkenntniss der Verhältnisse — auf den Gedanken kommen, für den Zusammenhang zwischen Elastizitätsmodul E und relativer Längenänderung ε versuchsweise die einfache Annahme zu machen, dass diese Grössen durch eine lineare Funktion verknüpft wären, entsprechend einer von der Druckseite nach der Zugseite sich senkenden Geraden, also

$$E = C_1 - C_2 \varepsilon,$$

wonach die Differentialgleichung der vollständigen Arbeitskurve die Form

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = C_1 - C_2 \varepsilon$$

erhalten würde, deren Integration die Gleichung dieser Kurve zu

$$\sigma = C_1 \varepsilon - \frac{C_2}{2} \cdot \varepsilon^2 + C_3$$

liefern würde; indem wir bedenken, dass dieselbe in allen Fällen den Nullpunkt des Koordinatensystems enthalten muss, auf das wir die Gleichung der Arbeitskurve beziehen, haben wir

$$C_3 = 0$$

zu setzen; bezeichnen wir hierüber die Werthe

$$C_1 \text{ mit } a, \quad \frac{C_2}{2} \text{ mit } b,$$

so erhalten wir als Gleichung dieser Kurve

$$\sigma = a\varepsilon - b\varepsilon^2,$$

also die Gleichung einer durch den Nullpunkt gehenden Parabel, deren Achse zur Achse der σ parallel läuft und deren Scheitel die positiven Koordinaten

$$\frac{a}{2b} \text{ und } \frac{a^2}{2b}$$

hat.

Die erste Ableitung dieser Gleichung

$$\sigma' = a - 2b\varepsilon$$

würde den Elastizitätsmodul in seiner Abhängigkeit von ε darstellen, also

$$E = a - 2b\varepsilon.$$

Für das von Kennedy untersuchte Gusseisen würden sich aus

$$966 = a \cdot \frac{96}{10^5} - b \cdot \left(\frac{96}{10^5}\right)^2,$$

$$-1620 = -a \cdot \frac{134}{10^5} - b \cdot \left(\frac{134}{10^5}\right)^2$$

die Werthe der Konstanten a und b ergeben zu

$$a = 10{,}9 \cdot 10^5, \quad b = 880 \cdot 10^5.$$

Die vollständige Arbeitskurve für die nur elastischen Dehnungen des Gusseisens hätte also — unter Zugrundelegung der Kennedy'schen Beobachtungen — die Gleichung

$$\sigma = 10^5(10{,}9 \cdot \varepsilon - 880 \cdot \varepsilon^2),$$

die Funktion für den Elastizitätsmodul sonach die Form

$$E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 10^5(10{,}9 - 1760\,.\,\varepsilon).$$

Der Elastizitätsmodul für sehr kleine Dehnungen ergiebt sich hieraus mittelst $\varepsilon = 0$ zu

$$E_0 = 1\,090\,000\,^{kg}/_{\square^{cm}};$$

für eine elastische Zugdehnung $\varepsilon = 0{,}001$ ist die Spannung $\sigma = 1002\,^{at}$, der Elastizitätsmodul

$$E = 914\,000,$$

für eine elastische Stauchung $\varepsilon = -0{,}001$ die Spannung $\sigma = -1178\,^{at}$ und

$$E = 1\,266\,000.$$

Fig. 8 auf Taf. V giebt ein Bild der bis zu den wahrscheinlichen Bruchgrenzen erweiterten Arbeitskurve des verwendeten Gusseisens.

Aehnliche Resultate ergeben sich aus einigen Versuchen, die von Hudson Beare im mechanischen Laboratorium des University College in London ausgeführt hat (vgl. Engineering 1892, S. 277). Hier wird die Zusammensetzung der aus dem Kuppelofen gegossenen Probestäbe näher angegeben; die Beschickung war aus 50 Proz. besten Abfällen (best scrap), 25 Proz. Nr. 1 Gartsherrie und 25 Proz. Nr. 1 Carron zusammengesetzt; die in die Maschine gebrachten (abgedrehten) Probestäbe hatten einen Querschnitt von $2{,}85\,\square^{cm}$ und eine Länge von $26{,}7^{cm}$, wovon jedoch für die Messung der Dehnungen und Stauchungen nur $25{,}4^{cm}$ benutzt wurden; die Vergrösserung der nach aufgebrachter Belastung eintretenden Längenänderungen erfolgte auf mechanischem Wege; die bleibenden Dehnungen wurden durch zwei Vorbelastungen ausgeschieden; ich entnehme der Fig. 4 der angezogenen Veröffentlichung die zusammengehörigen Werthe

a) für die Zugbeanspruchung

$$\varepsilon = \frac{80}{10^5}, \quad \sigma = 791\,^{at},$$

b) für die Druckbeanspruchung

$$\varepsilon = -\frac{120}{10^5}, \quad \sigma = -1371\,^{at}.$$

Danach würde sich als Gleichung der vollständigen Arbeitskurve der nur elastischen Dehnungen und Stauchungen ergeben

$$\sigma = 10^5(10{,}5\,.\,\varepsilon - 770\,.\,\varepsilon^2),$$

daher der Elastizitätsmodul als erste Ableitung

$$E = 10^5(10{,}5 - 1540\,.\,\varepsilon).$$

Diese Gleichung würde den Elastizitätsmodul für unendlich kleine Spannungen ($\sigma = 0$, $\varepsilon = 0$) zu

$$E_0 = 1\,050\,000\,^{kg}/_{\square^{cm}}$$

beziffern; für eine elastische Zugdehnung $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ der Anfangslänge fände sich

$$E = 996\,000,$$

für eine elastische Stauchung $\varepsilon = -\frac{1}{1000}$:

$$E = 1\,204\,000,$$

Werthe, die mit den aus den Beobachtungen Kennedy's hergeleiteten gut übereinstimmen. Die Gestalt der vollständigen Arbeitskurve ist in Fig. 8 als eine strichpunktirte Linie eingetragen worden.

Hält man die Beobachtungen von Kennedy und Beare für gleich zuverlässig, so kann man als Gleichung der Arbeitskurve der elastischen Längenänderungen des grauen Gusseisens bis auf weiteres annehmen

$$\sigma = 10^5(10{,}7\,.\,\varepsilon - 825\,.\,\varepsilon^2),$$

daher als Gleichung des Elastizitätsmoduls

$$E = 10^5(10{,}7 - 1650\,.\,\varepsilon).$$

Will man den Elastizitätsmodul als Funktion der spezifischen Beanspruchung σ ausdrücken, so hat man zunächst die Gleichung der Arbeitskurve in bekannter Art umzukehren:

$$\varepsilon = 10^5(0{,}0935\,.\,\sigma - 0{,}673\,.\,\sigma^2),$$

wonach sich ergiebt:

$$E = 10{,}7\,.\,10^5 - 154{,}3\,.\,\sigma - 0{,}011\,.\,\sigma^2.$$

Hiernach berechnet sich für

die Beanspruchung σ	der Elastizitätsmodul E
$+250\,^{at}$	$10{,}65\,.\,10^5$
0	$10{,}70\,.\,10^5$
$-500\,^{at}$	$11{,}44\,.\,10^5$

Sollte es darauf ankommen, die Veränderungen des Elastizitätsmoduls beim Gusseisen noch genauer und für weitere Spannungsgrenzen festzustellen, so würde in einer der technischen Versuchsanstalten eine grössere Zahl von Koordinaten der Arbeitskurven für die nur elastischen Dehnungen ermittelt werden müssen; diese Kurven wären für Druck und Zug an Probestücken aus demselben zuverlässig charakterisirten Roheisen punktweise festzustellen, wonach vielleicht eine Gleichung dritten Grades eine noch befriedigendere Wiedergabe des wirklichen Zusammenhanges zwischen den Grössen ε und σ liefern wird, der Zusammenhang zwischen E und ε, beziehentlich E und σ daher mittelst zweier Gleichungen zweiten Grades darzustellen wäre.

Auch beim Gusseisen wird man wie bei allen Festkörpern, die nicht schon von ihrem Erzeugungsprozess her ein Belastungsintervall mit vollkommen elastischem Verhalten aufweisen, die Vorstellung festhalten müssen, dass es ein solches Intervall durch die erste Beanspruchung selbst empfängt, dass eine Grenze vollkommener Elastizität geschaffen wird, die um so höher liegt, je weiter die höchste der schon herbeigeführten spezifischen Belastungen gestiegen war, und es wird nur dem Umstande, dass bei der Herstellung der Probestücke aus diesem Materiale alle Prozesse des Schmiedens, Walzens, Ziehens u. s. w. ausgeschlossen sind, zuzuschreiben sein, dass die Beobachter beharrlich das Fehlen einer Elastizitätsgrenze betonen, die doch bei Probestücken aus Schmiedeisen und Stahl schon bei der ersten Belastung (als Grenze eines geradlinigen Stückes der Arbeitskurve) sich kundgiebt; würde das Mittel der wiederholten Ent- und Belastung angewendet werden, so würde auch beim Gusseisen das Vorhandensein der schon durch die erste Belastung geschaffenen Elastizitätsgrenze sogleich hervortreten.

Hat man, wie beim Gusseisen, eine die Beobachtungsdaten befriedigend wiedergebende Gleichung der vollständigen — Zug- und Druckbeanspruchung umschliessenden — Arbeitskurve gefunden, so lassen sich nun mit grösserer Schärfe die Völligkeitsgrade derjenigen Flächenstücke feststellen, welche den Gesammtbetrag der Zerreissungs- und Zerdrückungsarbeit (insoweit die nur elastischen Aenderungen der Stablänge in Betracht kommen) angeben, wonach schliesslich in einer übersichtlichen Art die spezifischen (auf die Volumens- oder Gewichtseinheit bezogene) Arbeitsgrössen der Elastizitätskraft beim Zerreissen und Zerdrücken sich berechnen lassen.

Bezeichnet (in Fig. 9, Taf. V) OAB das die Dehnungsarbeit während des Zerreissens messende Flächenstück und bedeutet

Z_z die relative elastische Dehnung des Probestückes beim Beginn des Bruches (für $l = 1$),

K_z die zugehörige grösste Spannung (in $^{kg}/_{\square cm}$),

so ergiebt sich der Völligkeitsgrad der Arbeitsfläche für Zugbeanspruchung (als Verhältniss derselben zur Fläche des umschliessenden Rechteckes) zu

$$\eta_z = \frac{\int_0^{Z_z} (a\varepsilon - b\varepsilon^2)\, dx}{Z_z \cdot K_z} = \frac{\frac{a}{2} Z_z - \frac{b}{3} \cdot Z_z^2}{K_z}$$

und analog der Völligkeitsgrad des unterhalb der X-Achse gelegenen Arbeitsdiagrammes der Zerdrückungsarbeit

$$\eta_d = \frac{\frac{a}{2} Z_d - \frac{b}{3} Z_d^2}{K_d},$$

worin

Z_d die elastische Verkürzung eines auf Druck beanspruchten Probestückes von der Länge 1 im Augenblicke des Bruches und

K_d die zugehörige spezifische Pressung (in $^{kg}/_{\square cm}$) bedeutet.

Bezeichnet endlich s das spezifische Gewicht des untersuchten Materials, so berechnet sich die spezifische (auf eine Tonne = 1000 kg bezogene) Zerreissarbeit zu

$$A_z = \frac{10^4 \cdot \eta_z}{s} \cdot K_z \cdot Z_z \, {}^{mkg}/_{T}$$

und entsprechend die spezifische Zerdrückungsarbeit

$$A_d = \frac{10^4 \cdot \eta_d}{s} \cdot K_d \cdot Z_d \, {}^{mkg}/_{T}.$$

Wenn auch ein Versuch der hier angedeuteten Art selbstverständlich nicht den Werth hat, wie eine aus der Erkenntniss des molekularen Aufbaues der Festkörper hergeleitete mathematische Formulirung (die uns leider noch fehlt), so giebt er doch die Möglichkeit zu einer übersichtlicheren Anordnung und anschaulichen Verknüpfung der täglich anwachsenden Beobachtungsdaten. Indem man nach der Gleichung der vollständigen Dehnungs- und Stauchungskurve eines Baustoffes fragt und deren bemerkenswerthe Punkte, wird man zuverlässiger der Lücken bewusst, die durch das Experiment im mechanisch-technischen Laboratorium noch auszufüllen sind. Mein verstorbener Freund Emil Winkler hat in einem früheren Jahrgange dieses Blattes (1863, S. 412) die beherzigenswerthen Worte niedergelegt, die mich zu dieser kleinen Untersuchung angeregt haben: „Schon viel weniger Versuche würden hinreichen, wenn sie zweckmässiger angestellt wären. Vorzüglich wichtig ist es, genaue Kenntniss über die Beziehungen zwischen den einzelnen Koëffizienten desselben Materials zu erhalten.“ Dass man hierbei zunächst bestrebt sein muss, mit dem Vorgange des Reckens und Stauchens ins Reine zu kommen, bedarf kaum der Erinnerung.

Man mag einwenden, dass die Sonderwerthe der Koordinaten der Arbeitskurven, die den Erscheinungen des Bruches entsprechen, nach den vorliegenden Erfahrungen von Querschnittsform und Abmessungsverhältnissen nicht unabhängig sind; dieser Umstand hindert aber nach meinen Beobachtungen nicht, dass die Funktionsform, durch welche die zusammengehörigen Werthe von ε und σ verknüpft sind, unter allen Umständen gleichmässig erkennbar ist; nach den im einzelnen Falle gewonnenen Sonderwerthen der Koordinaten ändern sich nur die Konstanten der dem Vorgange am besten sich anschliessenden empirischen Gleichungen.

Trotz der vielen, seit 1729[1]) schon durchgeführten Untersuchungen der Festigkeitseigenschaften fester Baustoffe ist unser Wissen darüber noch sehr lückenhaft. Auch wenn wir uns zunächst nur auf die Beanspruchung durch Zug- und Druckkräfte beschränken, so handelt es sich doch für jedes Material um die Aufsuchung von vier verschiedenen Funktionen, wenn wir sagen wollen, dass wir das Verhalten desselben vollständig kennen.

Wird ein gerader Stab von der Länge 1 und dem Querschnitte 1 einer Zugspannung σ unterworfen, so erfährt er eine Verlängerung ε, die sich aus einem bleibenden und einem elastischen, d. h. nach Aufhebung der Spannung wieder verschwindenden Theil zusammensetzt:

$$\varepsilon = \varepsilon_b + \varepsilon_e.$$

Der Quotient

$$E_z = \frac{\sigma}{\varepsilon_e}$$

stellt den Elastizitätsmodul des Stabes dar, sofern derselbe als eine konstante (mit der spezifischen Belastung nicht weiterhin veränderliche) Verhältnisszahl anzusehen ist; sein reziproker Werth

$$\alpha_e = \frac{\varepsilon_e}{\sigma} = \frac{1}{E_z}$$

heisst der Dehnungskoëffizient, genauer der Koëffizient der elastischen Dehnung. Analog hierzu wird man nach einem Dehnungskoëffizienten der bleibenden Dehnung fragen müssen:

$$\alpha_b = \frac{\varepsilon_b}{\sigma},$$

der als reziproker Werth eines dem Elastizitätsmodul entsprechenden Bildsamkeitsmoduls B_z aufzufassen ist:

$$B_z = \frac{\sigma}{\varepsilon_b}.$$

Die Summe der beiden so unterscheidbaren Dehnungskoëffizienten

1) Petri van Musschenbroek, Introductio ad Cohaerentiam corporum firmorum. Lugduni Batavorum MDCCXXIX; wohl die erste grössere Untersuchung über Zug- und Biegungsfestigkeit.

$$\alpha = \alpha_b + \alpha_e = \frac{1}{B_z} + \frac{1}{E_z}$$

mag der Dehnungskoëffizient schlechthin heissen, dessen Kenntniss dem Konstrukteur wohl erforderlich ist, von dessen Theilbeträgen jedoch der dem elastischen Verhalten entsprechende offenbar die grössere Bedeutung hat, denn die einem gewissen wirklich erreichten Belastungsgrade entsprechende bleibende Längenänderung ist ihrer Natur nach der Vergangenheit angehörig; man hat also mit ihr nicht weiter zu rechnen, wenn ein in Betracht gezogener Konstruktionstheil wechselnden Beanspruchungen unterworfen ist, die jenen schon vorher erreichten Belastungsgrad nicht überschreiten.

Bezeichnet

$$\sigma = \varphi(\varepsilon_e)$$

die Gleichung der Arbeitskurve für die elastischen Dehnungen, so ist für den hier erörterten allgemeinen Fall eines mit σ veränderlichen Elastizitätsmoduls die Ableitung

$$\frac{d\varphi(\varepsilon_e)}{d\varepsilon_e} = E_z$$

und analog hierzu für die Arbeitskurve der bleibenden Dehnungen

$$\sigma = f(\varepsilon_b), \quad \frac{df(\varepsilon_b)}{d\varepsilon_b} = B_z.$$

Bezeichnet man für den Vorgang des Stauchens den dem α entsprechenden Koëffizient mit β, so gelten die entsprechenden Beziehungen

$$\beta = \frac{1}{B_d} + \frac{1}{E_d},$$

worin E_d den Elastizitätsmodul für Druck im bisherigen Sinne, B_d den Bildsamkeitsmodul für Druck bezeichnet. Es gilt auch

$$\sigma = F(\varepsilon_b) \text{ und } B_d = \frac{dF(\varepsilon_b)}{d\varepsilon_b},$$

$$\sigma = \Phi(\varepsilon_e) \text{ und } E_d = \frac{d\Phi(\varepsilon_e)}{d\varepsilon_e}.$$

Die vollständige Aufgabe der Beobachtungskunst würde sich daher dahin erweitern müssen, dass für die wichtigeren Materialien die vier Funktionen

$$f(\varepsilon_b), \quad \varphi(\varepsilon_e), \quad F(\varepsilon_b) \text{ und } \Phi(\varepsilon_e)$$

nebst den etwa vorhandenen den Brucherscheinungen entsprechenden Sonderwerthen ihrer Koordinaten aufgesucht werden. Es ist wahrscheinlich, dass die Funktionen $f(\varepsilon_b)$ und $F(\varepsilon_b)$, beziehentlich $\varphi(\varepsilon_e)$ und $\Phi(\varepsilon_e)$ identisch sind und für den spannungslosen Zustand des Probestückes der Stetigkeit nicht ermangeln.

Ist diese Aufgabe erst gelöst, so wird auch die Elastizitätstheorie der festen Körper die bisher festgehaltenen Grenzen überschreiten können, denn nach einer Bemerkung von Clebsch (Theorie der Elastizität fester Körper, Leipzig 1862, S. 4) ist sie hieran in der Hauptsache dadurch gehindert, dass die Zustände der festen Körper, die dem Bruche vorhergehen, zur Zeit noch „mathematisch undefinirbar" sind.

Studien über den günstigsten Arbeitsprozess thermodynamischer Maschinen.

Von

Hans Lorenz, Ingenieur.

(Hierzu Tafel VI.)

§ 1. **Vorbemerkung.** In den Wärmekraftmaschinen verfolgen wir durchgehends den Zweck, potentielle Energie, welche in Form von Wärme an irgend einen Stoff (Dampf oder Gas) gebunden, beziehungsweise demselben mitgetheilt worden ist, in kinetische Energie zu verwandeln und dann als mechanische Arbeit nutzbar zu verwenden. Die Aufgabe der Maschinentechnik besteht nun darin, diese Umwandlung möglichst vollständig durchzuführen, insbesondere alle Verluste sowohl vor, als auch während und nach derselben durch zweckmässige Anordnung des Prozesses und richtige konstruktive Ausführung thunlichst zu vermeiden. Für derartige Bestrebungen war natürlich die Erkenntniss, bis zu welchem Umfange diese Verwandlung mit den uns zu Gebote stehenden technischen Mitteln getrieben werden konnte, von grosser Wichtigkeit. Man darf heute behaupten, dass alle dahin zielenden theoretischen Versuche vor den Publikationen Zeuner's, dem wir diese Erkenntniss verdanken, für die Entwickelung und Vervollkommnung der Wärmekraftmaschinen nur von untergeordneter Bedeutung geblieben sind. Während die durch Mayer und Joule (1842) begründete Thermodynamik uns die Wärme als eine besondere Form potentieller Energie zeigte und damit die Möglichkeit der oben erwähnten Umwandlung überhaupt erklärte, war es Zeuner vorbehalten, mit Hülfe dieser Thatsache aus den schon von Carnot (1824) und Clapeyron (1834) untersuchten Kreisprozessen den für die Maschinentechnik so wichtigen Begriff einer „vollkommenen Maschine" abzuleiten und damit für die Weiterausbildung aller bisher bekannten Wärmekraftmaschinen, bei denen während des Arbeitsprozesses keine stofflichen, d. h. chemischen Umwandlungen stattfinden, einheitliche Grundsätze festzustellen.

§ 2. **Der erste Hauptsatz der Thermodynamik.** Die Wichtigkeit dieser Grundsätze für die nachfolgenden Untersuchungen erfordert es, an dieser Stelle darauf in

Fig. 4.
Vulkanisirter Kautschuk.

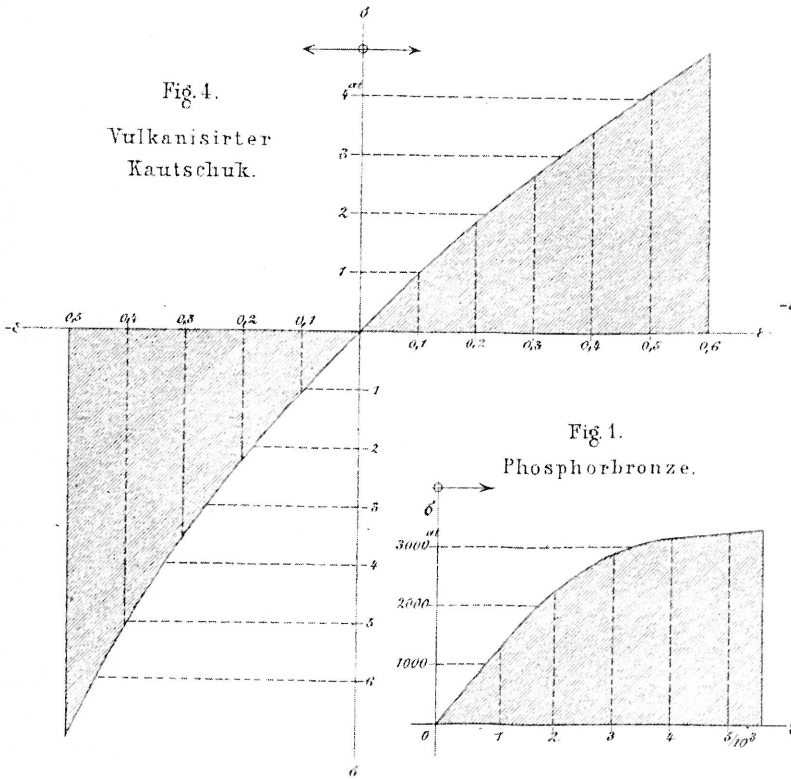


Fig. 1.
Phosphorbronze.

Fig. 5.
Treibriemen (Rindsleder).

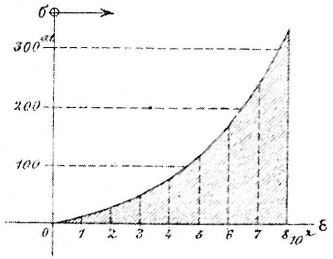


Fig. 7.
Gufseisen.

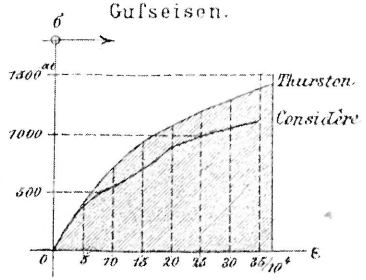


Fig. 8.
Gufseisen
(Kennedy).

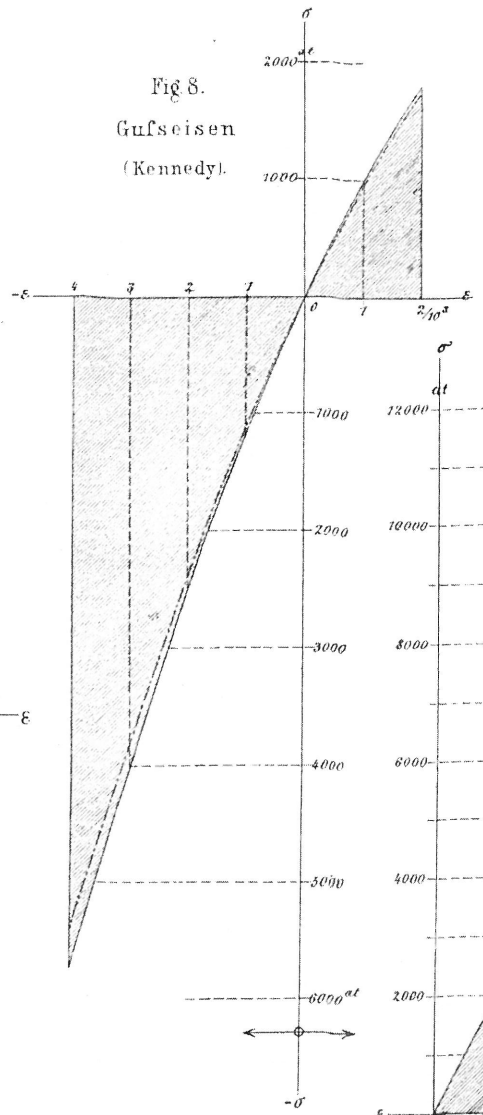


Fig. 3. Rohseide.

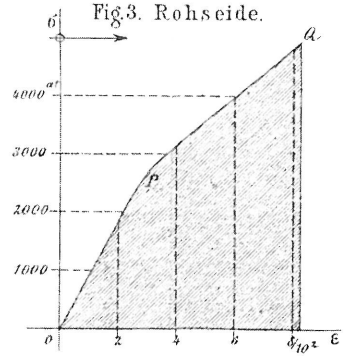


Fig. 2.
Stahldraht.

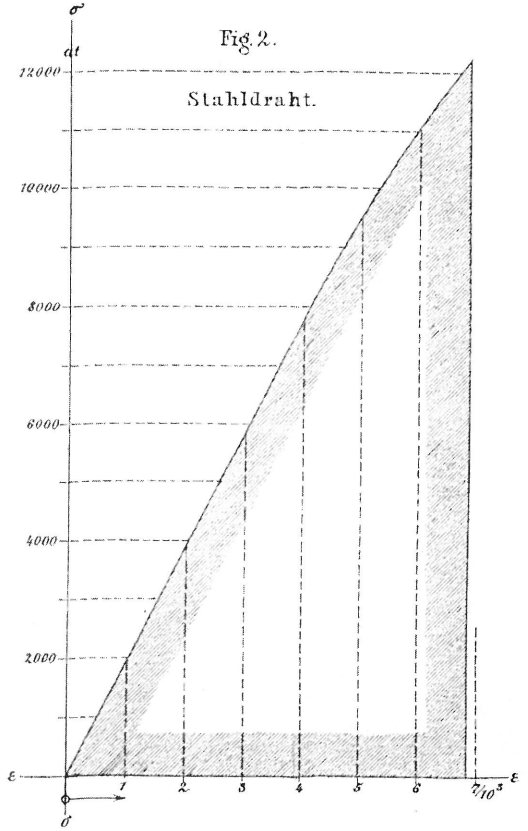


Fig. 6.
Korkrinde.

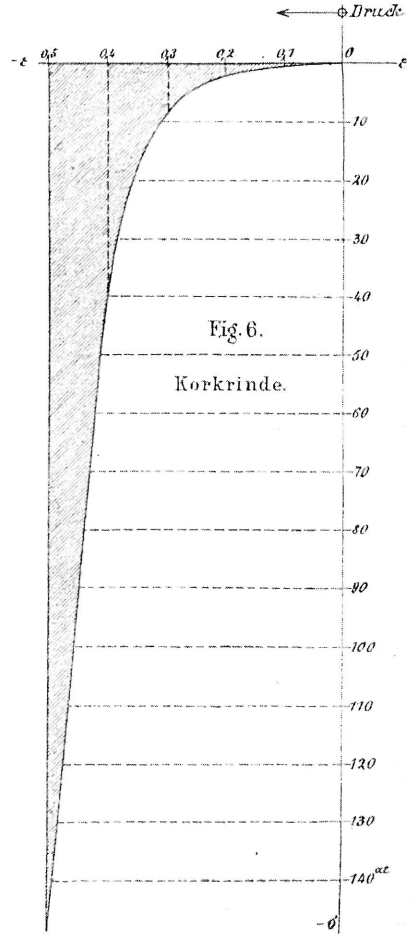
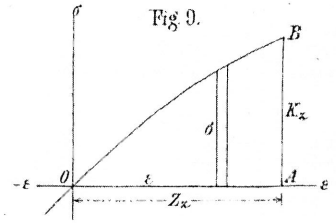


Fig. 9.



Verlag v. Arthur Felix in Leipzig

Lith. Anst. v. Steinmetz & Bernemann, Meifsen.

Fig. 1.

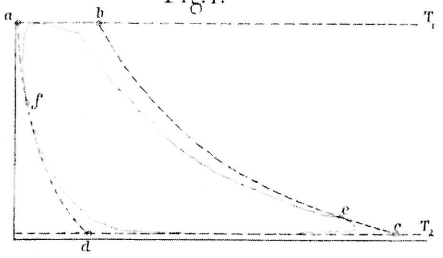


Fig. 2.

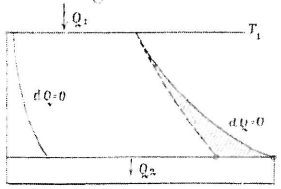


Fig. 3.

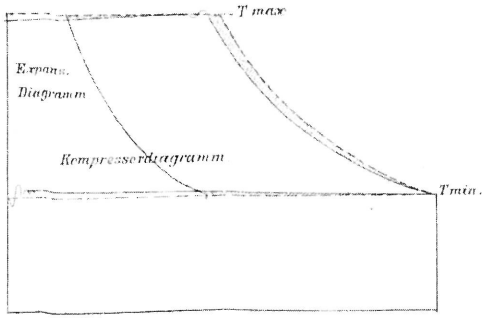


Fig. 4.

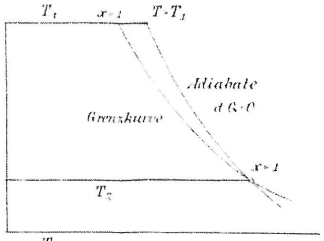


Fig. 10.

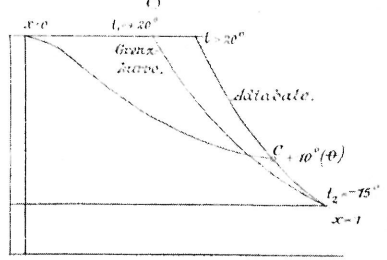


Fig. 8.

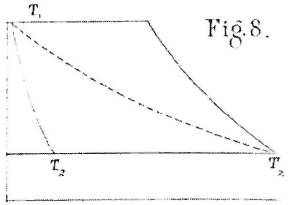


Fig. 9.

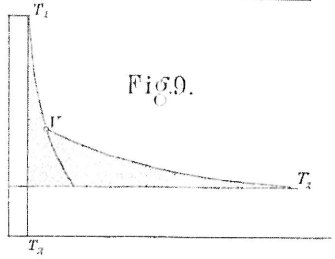


Fig. 16.

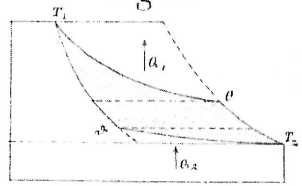
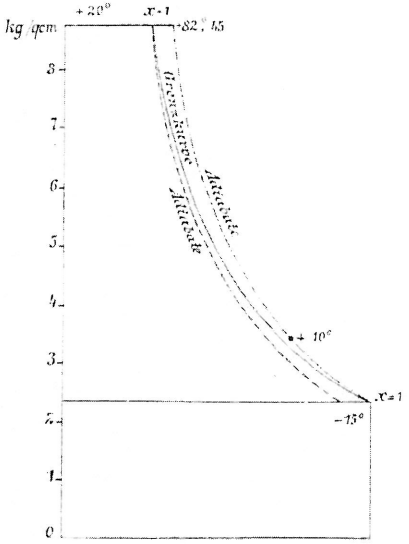


Fig. 5.

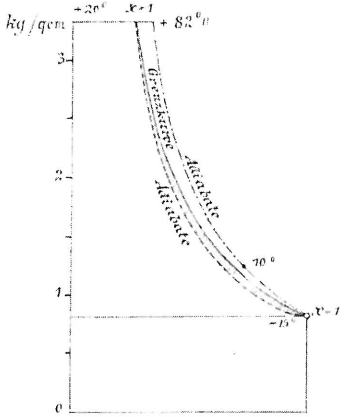
Ammoniak.



$10^{mm} = 1^{kg}/qcm$
$100^{mm} = 1^{cbm}$

Fig. 6.

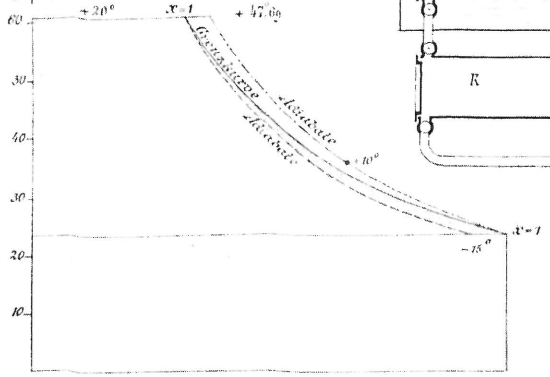
Schwefelige Säure.



$20^{mm} = 1^{kg}/qcm$
$100^{mm} = 1^{cbm}$

Fig. 7.

Kohlensäure.



$1^{mm} = 1^{kg}/qcm$
$3000^{mm} = 1^{cbm}$

Fig. 11.

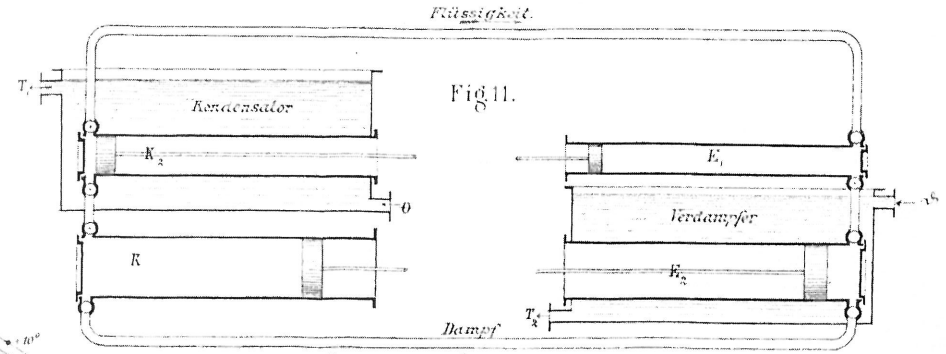


Fig. 12.

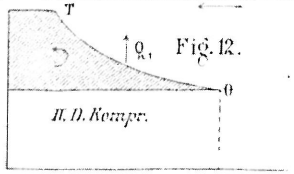


Fig. 13.

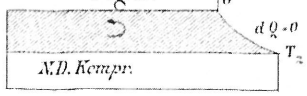


Fig. 14. $dQ=0$

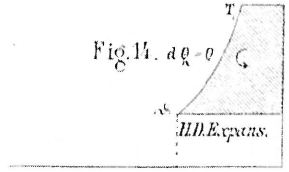
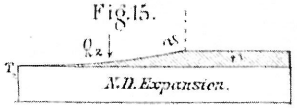


Fig. 15.



Verlag von Arthur Felix in Leipzig.
Lith. Anst. v. Stommeln & Bornemann Neffen.