Über die Form des Elastizitätsgesetzes bei ideal elastischen Stoffen

Von H. Hencky in Delft

Inhalt: Das Elastizitätsgesetz für endliche Verformungen. Wie überlagern sich die verschiedenen Spannungs- und Verformungszustände in einfuchen Fällen? Der Ausdruck für die elastische Arbeit und die Theorie des Zug- und Druckversuchs mit elastischen Stoffen von gummiartiger Beschaffenheit.

Einleitung

Ideal elastisch wollen wir einen solchen Stoff nennen, der bei beliebig hoher Beanspruchung niemals von der in ihm aufgespeicherten elastischen Energie etwas verliert und infolgedessen bei der Entlastung wieder in seinen ursprünglichen Zustand übergeht. Es ist dabei gar nicht wichtig, daß ein solcher idealer elastischer Kreisprozeß nicht existiert, daß unser ideal elastischer Stoff also ein Ideal bleiben muß. Er ist aber, wie auch so mancher andere mathematische und geometrische Begriff, ein nützliches Ideal, denn wenn seine deduktiv ableitbaren Eigenschaften erkannt sind, kann er als Vergleichsmaßstab für die Beurteilung des wirklichen elastischen Verhaltens der in der Natur vorkommenden Körper dienen.

Bei dieser Aufgabe leistet uns die Theorie der endlichen elastischen Formänderungen, die bis zu einem gewissen Grade bereits entwickelt ist, gute Dienste.[1]) Allein in einem wichtigen Punkt werden wir die klassische Theorie der endlichen Deformationen[2]) ergänzen müssen. Es ist gewiß richtig, daß die elastische Energie als Funktion der Drehungsinvarianten des Deformationstensors angesetzt werden kann, aber es ist nicht zweckmäßig, auf dieser formalen Einsicht allein die ganze weitere Behandlung des Problems aufbauen zu wollen.

Wir werden erstens zeigen, daß man auf einem von jeder Willkür freien direkten Weg das Elastizitätsgesetz aufstellen kann, und zweitens werden wir sehen, daß die elastische Energie selbst in den einfachsten Fällen zu verwickelten Gesetzen folgt, als daß man sie ohne weiteres auf analoge Weise wie bei der unendlich kleinen Verformung ansetzen könnte.

I. Das Elastizitätsgesetz des ideal elastischen Körpers

Unter der Voraussetzung, daß man ein ganz bestimmtes Volumenelement herausschneidet, dessen Lage und Achsenrichtungen aus der Art der Verformung eindeutig bestimmt wird, kann man auch bei der endlichen Verformung die Änderung, die dieses herausgeschnittene Volumenelement erfährt, auffassen als eine Streckung in den drei zueinander senkrechten Kantenrichtungen des Elements, als eine Verschiebung des Schwerpunktes und eine endliche Drehung um eine bestimmte Achse. Es besteht aber doch ein recht wesentlicher Unterschied mit der unendlich kleinen Verformung, denn bei der letzteren muß das Teilchen wirklich die angegebenen Zustandsänderungen durchlaufen, bei der endlichen Verformung aber wird durch die angegebene Drehung und Streckung lediglich der erreichte Endzustand gekennzeichnet, es wird aber nichts über die durchlaufenen Zustände, die mit diesem Endzustand abschließen, ausgesagt. Die Bedeutung dieses Unterschiedes tritt besonders bei der Berechnung der elastischen Energie hervor.

Die eben erwähnten Kanten des herausgeschnittenen Parallelepipedes stehen vor und nach der Deformation senkrecht aufeinander, sind aber, wie gesagt, um einen endlichen Winkel gegen die Anfangslage verdreht. Wir wollen diese drei Hauptdehnungsrichtungen stets mit den Indizes 1, 2, 3 bezeichnen, die sich also auf das Materieteilchen, nicht etwa auf eine feste Raumrichtung beziehen.

Mit dx bezeichnen wir die Länge des Bogenelementes vor der Verzerrung, ferner mit $\overline{dx}$ die Länge desselben Elementes nach der Verzerrung, und mit dV bzw. $\overline{dV}$ die entsprechenden Volumenelemente. Es gilt dann

$$dV = dx_1\, dx_2\, dx_3 \quad \text{und} \quad \overline{dV} = \overline{dx_1}\,\overline{dx_2}\,\overline{dx_3}\,.$$

Die drei Hauptdehnungen definieren wir durch folgende Beziehungen:

$$e_1 = \frac{\overline{dx_1} - dx_1}{\overline{dx_1}}\,; \quad e_2 = \frac{\overline{dx_2} - dx_2}{\overline{dx_2}}\,;$$

$$e_3 = \frac{\overline{dx_3} - dx_3}{\overline{dx_3}}\,.$$

Wir wollen zur Abkürzung künftig stets den Index i für alle drei Hauptrichtungen gebrauchen, für i hat man dann jedesmal die Indizes 1, 2, 3 einzusetzen. Die obigen Definitionen für die Dehnung werden dann

$$e_i = \frac{\overline{dx_i} - dx_i}{\overline{dx_i}}\,. \tag{1a}$$

Das Verhältnis der Endlängen zu den Anfangslängen ergibt sich durch eine einfache Umrechnung zu

$$\frac{\overline{dx_i}}{dx_i} = \frac{1}{1 - e_i}\,, \tag{1b}$$

ebenso das Verhältnis von End- zu Anfangsvolumen

---

1) Siehe G. Hamel, Elementare Mechanik (1922), 563—576.

2) Vgl. hierzu Enz. d. math. Wiss, Bd. IV, Mechanik, 4. Teilb., S. 51—54, sowie die dort befindlichen Literaturangaben.

$$\frac{\overline{dV}}{dV} = \frac{1}{(1-e_1)(1-e_2)(1-e_3)} \qquad (1c)$$

Denken wir uns ein Element, das nach den Hauptdehnungsrichtungen im Endzustand des Gleichgewichts herausgeschnitten ist, so müssen wir in den drei Hauptrichtungen die Hauptspannungen S_1, S_2, S_3 anbringen, die natürlich auf den Endzustand bezogen sind. Im Materialprüfungswesen spricht man freilich manchmal von Spannungen, die auf den Anfangszustand bezogen sind, vom Standpunkt der Theorie muß man aber gegen die Schöpfung eines derartigen Unbegriffes protestieren. Die Beziehungen zwischen den S_i und den e_i werden wir so formulieren, daß sich beim Übergang zu unendlich kleinen Dehnungen das Hookesche Gesetz in der in der technischen Mechanik üblichen Form ergibt.

Ist G der Schubelastizitätsmodul, m die Querkontraktionsziffer, die allerdings diese Bedeutung nur bei unendlich kleiner Deformation hat, und bezeichnet man mit k den Ausdruck

$$k = \frac{m+1}{3(m-2)} \qquad (2a)$$

macht man ferner von den Abkürzungen Gebrauch

$$e = \frac{1}{3} \cdot (e_1 + e_2 + e_3) \qquad (2b)$$

und

$$S = \frac{1}{3} \cdot (S_1 + S_2 + S_3) \qquad (2c)$$

dann lautet das Hookesche Gesetz

$$S_i = 2\,G\{e_i + (3\,k - 1) \cdot e\} \qquad (2d)$$

für die drei Hauptspannungen, und nach Addition dieser drei Gleichungen

$$S = 2\,G\,k \cdot 3\,e. \qquad (2e)$$

Auf der linken Seite dieser letzten Gleichung steht der hydrostatische Teil des Spannungszustandes, der bei einem isotropen Stoff der Volumenausdehnung proportional sein muß.

Bei einer endlichen Verformung bedeutet aber $3\,e$ nicht mehr die Volumenausdehnung, so daß der Ansatz seinen mechanischen Sinn einbüßt. Dazu kommt noch, daß der Wert 1 für eine der e_i eine unendlich große Streckung des betreffenden Elements bedeutet, ohne daß die entsprechende Spannung dabei unendlich würde, was ebenfalls keinen vernünftigen mechanischen Sinn hat. Diesem Widerspruch kann man auch durch eine andere Definition der Dehnung nicht entrinnen, wie man sich leicht überzeugt.

Will man die einfache Form des Elastizitätsgesetzes mit nur zwei Elastizitätsbeiwerten bewahren, und die soeben aufgezählten Widersprüche vermeiden, so gibt es überhaupt nur einen einzigen möglichen Ansatz, und das ist der folgende:

$$S_i = 2\,G \cdot \ln\left\{\frac{\overline{dx_i}}{dx_i} \cdot \left(\frac{\overline{dV}}{dV}\right)^{k - 1/3}\right\}. \qquad (3a)$$

Durch Addition der drei Hauptspannungen erhält man den hydrostatischen Teil des Spannungszustandes in der folgenden Beziehung:

$$S = 2\,G\,k \cdot \ln\left\{\frac{\overline{dV}}{dV}\right\} \qquad (3b)$$

durch welche, wie man sieht, die Volumenvergrößerung in der richtigen Weise mit dem hydrostatischem Zug oder Druck verbunden wird.

Sind die Verhältnisse unter den Logarithmen wenig von der Einheit verschieden, so lassen sich die Logarithmen leicht in Reihen entwickeln, deren höhere Glieder man weglassen kann und die Gl. (3a) und (3b) gehen damit in die Formeln (2d) und (2e) über.

Für die Anwendungen ist es meist bequemer, die Dehnungen e_i einzuführen. Wir erhalten auf diese Weise:

$$\left.\begin{aligned} S_i = -\,2\,G \cdot \ln\{&(1-e_i) \cdot \\ &[(1-e_1)(1-e_2)(1-e_3)]^{k-1/3}\} \end{aligned}\right\} \qquad (4a)$$

$$S = -\,2\,G\,k\,\ln\{(1-e_1)(1-e_2)(1-e_3)\} \qquad (4b)$$

Die e_i sind Zahlen, die alle Werte von negativ unendlich bis über 0 zu $+1$ annehmen können. Für die Werte negativ unendlich und $+1$ erhalten wir unendlich große Spannungswerte, wie es der mechanische Sinn des Elastizitätsgesetzes verlangt. Wir haben daher in den Gl. (3) und (4) das gesuchte Elastizitätsgesetz für isotrope Stoffe vor uns.

2. Das Überlagern verschiedener Spannungs- und Verformungszustände

Wir müssen uns nun fragen, was bei der Belastung eines schon im Spannungszustand befindlichen Körpers geschieht, d. h. wie sich die Spannungen und Verformungen übereinander legen. Dabei können wir uns auf das Studium homogener Spannungs- und Verformungszustände beschränken. Wir unterscheiden drei Zustände: Zustand I ist der unbelastete Anfangszustand, sind dx_1, dx_2, dx_3 die Seitenlängen desjenigen rechtwinkligen Parallelepipeds, welches nach erfolgter erster Belastung, die mit dem Zustand II endigt, ein rechtwinkliges Parallelepiped geblieben ist, so werden die Seitenlängen dieses deformierten Parallelepipeds nun die Größen $\overline{dx_1}$, $\overline{dx_2}$, $\overline{dx_3}$ haben. Entsprechend unserer Definition der Dehnung = Endlänge — Anfangslänge : Endlänge werden wir haben

$$e_i = \frac{\overline{dx_i} - dx_i}{\overline{dx_i}}$$

oder in anderer Schreibweise

$$\overline{dx_i} = dx_i : (1 - e_i). \tag{5a}$$

Wenn wir nun eine neue Verformung vornehmen, wird unser rechtwinkliges Parallelepiped nicht mehr rechtwinklig bleiben können. Wir können aber im Zustand I ein ganz bestimmtes anderes rechtwinkliges Parallelepiped dy_1, dy_2, dy_3 abgrenzen, das in II schiefwinklig sein wird, aber im Zustand III wieder rechtwinklig wird und dann die Kantenlängen $\overline{dy_1}, \overline{dy_2}, \overline{dy_3}$ hat. Die Dehnungswerte, die vom Zustand I nach III führen, sind:

$$e_i' = \frac{\overline{dy_i} - dy_i}{\overline{dy_i}}; \quad \text{oder} \quad \overline{dy_i} = dy_i : (1 - e_i'). \tag{5b}$$

Bezeichnen wir mit S_i die Hauptspannungen im Zustand II, mit S_i' die Hauptspannungen im Zustand III, dann gelten sowohl für den Zusammenhang zwischen den S_i und e_i einerseits, und den S_i' und e_i' andererseits die durch die Gl. (4a) und (4b) angegebenen Beziehungen. Sorgt man dafür, daß die Längen dx_i gleich denen der entsprechenden dy_i sind, dann erhält man

$$S_i' - S_i = 2\,G \cdot \ln\left\{\frac{\overline{\overline{dy_i}}}{\overline{dx_i}} \cdot \left[\frac{d\,V(\overline{\overline{y}})}{d\,V(\overline{x})}\right]^{k - 1/3}\right\} \tag{6}$$

Sind die e_i und die e_i' endlich, so steht auf der rechten Seite unter dem Logarithmus nicht etwa die Übergangstransformation von II zu III und zwar selbst dann nicht, wenn der Unterschied II—III unendlich klein ist. Da die Behandlung dieses allgemeinen Falles einen Aufwand an Rechnung verlangt, der zu den erreichbaren praktischen Resultaten in keinem annehmbaren Verhältnis steht, werden wir unsere folgenden Betrachtungen auf den Fall einschränken, daß die Hauptachsen der Spannungs- und Verformungszustände immer parallel den Hauptachsen des festen Koordinatensystems bleiben. Dann haben wir es nämlich immer mit einem und demselben materiellen Parallelepiped zu tun und erhalten besonders einfache Regeln für die Überlagerung verschiedener Spannungs- und Verformungszustände, sowie auch für die geleistete elastische Arbeit.

Das Volumenelement hat

im Zustand I die Abmessungen dx_1, dx_2, dx_3,
im Zustand II die Abmessungen $\overline{dx_1}, \overline{dx_2}, \overline{dx_3}$,
im Zustand III die Abmessungen $\overline{\overline{dx_1}}, \overline{\overline{dx_3}}, \overline{\overline{dx_3}}$.

Die Transformationen von I nach II, von I nach III und von II nach III werden:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{von I nach II} & \overline{dx_i} = dx_i : (1 - e_i) \\ \text{von I nach III} & \overline{\overline{dx_i}} = dx_i : (1 - e_i') \\ \text{und von II nach III} & \overline{\overline{dx_i}} = \overline{dx_i} : (1 - \Delta e_i) \end{array}\right\} \tag{7a}$$

Hieraus folgt aber für

$$1 - \Delta e_i = \frac{1 - e_i'}{1 - e_i} \tag{7b}$$

Ziehen wir die Spannungen S_i' und S_i voneinander ab, dann erhalten wir zunächst

$$S_i' - S_i = \Delta S_i =$$
$$-\,2\,G \cdot \ln \frac{(1 - e_i')[(1 - e_1')(1 - e_2')(1 - e_3')]^{k - 1/3}}{(1 - e_i)[(1 - e_1)(1 - e_2)(1 - e_3)]^{k - 1/3}}$$

und mit Benutzung von Gl. (7b)

$$\left.\begin{array}{l} S_i' - S_i = \Delta S_i = -\,2\,G \cdot \ln\{(1 - \Delta e_i) \cdot \\ \qquad [(1 - \Delta e_1)(1 - \Delta e_2)(1 - \Delta e_3)]^{k - 1/3}\} \end{array}\right\} \tag{8a}$$

Die Differenz ΔS_i hängt also nur mehr von der Übergangstransformation ab und nicht mehr von der vorausgehenden Transformation. Wie bereits erwähnt, gilt im allgemeinen dieser Satz selbst in dem Falle nicht, wenn die ΔS_i unendlich klein werden. Tritt dieser letztere Fall ein, so müssen im allgemeinen auch die Δe_i unendlich klein werden und man erhält nach Entwicklung des Logarithmus aus Gl. (8a) für eine unendlich kleine Übergangstransformation

$$\left.\begin{array}{l} S_i' - S_i = \Delta S_i = \\ 2\,G \cdot \{\Delta e_i + (k - 1/3)(\Delta e_1 + \Delta e_2 + \Delta e_3)\} \end{array}\right\} \tag{8b}$$

wobei also die ΔS_i nun selbst die Bedeutung von Spannungstensoren erhalten. In dem speziellen Fall, den wir hier behandeln und nur in diesem ist das Hookesche Gesetz das zu unserem Elastizitätsgesetz gehörige Differentialgesetz.

3. Die aufgespeicherte elastische Energie

Der letzte Satz leistet uns bei der Berechnung der elastischen Arbeit gute Dienste. Auch bei dieser Berechnung denken wir die Zustände II und III unendlich wenig verschieden voneinander.

Sind x_i die Koordinaten eines Punktes im Zustand I, so werden die Koordinaten desselben Punktes im Zustand II $x_i + u_i$ und im Zustand III $x_i + u_i + \Delta u_i$ sein.

Die Gleichungen (7a) nehmen dann eine etwas andere Form an, es wird

$$\overline{\overline{dx_i}} = dx_i\left\{1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_i}\right\}$$

und

$$\overline{dx_i} = dx_i\left\{1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right\}$$

und aus dem Vergleich mit den Gl. (7a) und (7b) ergibt sich

$$1 - \Delta e_i = \frac{1 + \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i}}{1 + \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} + \dfrac{\partial \Delta u_i}{\partial x_i}}$$

$$1 - \Delta e_i = \frac{1}{1 + (1 - e_i) \cdot \dfrac{\partial \Delta u_i}{\partial x_i}}$$

Hieraus findet man für den Differentialquotienten der zusätzlichen Verschiebung

$$\frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_i} = \frac{\Delta e_i}{(1 - \Delta e_i)(1 - e_i)}$$

und wenn die zusätzliche Verschiebung unendlich klein wird

$$\frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_i} = \frac{\Delta e_i}{1 - e_i} \tag{9}$$

Alle hier vorkommenden Funktionen sind auf die Anfangspositionen bezogen. Die Arbeit, bezogen auf die Einheit des Volumenelementes im Zustand I bezeichnen wir mit A_a, die Arbeit, bezogen auf die Einheit des Volumenelementes im Zustand II mit A_e. Die elastische Energie des Elementes $dx_1\, dx_2\, dx_3$ wird also um einen Betrag zunehmen:

$$\begin{aligned}\Delta A_a \cdot dx_1\, dx_2\, dx_3 = {} & S_1 \cdot \overline{dx_2}\,\overline{dx_3} \cdot \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_i} \cdot dx_1 \\ & + S_2 \cdot \overline{dx_3}\,\overline{dx_1} \cdot \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_2} \cdot dx_2 \\ & + S_3 \cdot \overline{dx_1}\,\overline{dx_2} \cdot \frac{\partial \Delta u_3}{\partial x_3} \cdot dx_3\end{aligned}$$

und unter Benutzung der Gleichungen (7a)

$$\begin{aligned}\Delta A_a = {} & \frac{1}{(1-e_1)(1-e_2)(1-e_3)} \left\{ S_1 (1-e_1) \cdot \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_1} \right. \\ & \left. + S_2 (1-e_2) \cdot \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_2} + S_3 (1-e_3) \cdot \frac{\partial \Delta u_3}{\partial x_3} \right\}\end{aligned}$$

Nun ist nach Gl. (4b), wenn wir mit $K = 2\,Gk$ den Elastizitätsmodul der (allseitigen) Ausdehnung oder Zusammendrückung bezeichnen

$$(1-e_1)(1-e_2)(1-e_3) = e^{-S/K}$$

und damit und mit Gl. (9) wird die Arbeitszunahme

$$\Delta A_a = e^{S/K} \cdot \{ S_1 \Delta e_1 + S_2 \Delta e_2 + S \Delta e_3 \}.$$

Mit Hilfe der Gl. (8b) können wir den letzten Ausdruck in eine uns noch besser vertraute Form bringen. Wir können diese Gleichungen nämlich umkehren und erhalten dann mit $E = 2\,G(1 + 1/m)$

$$E \cdot \Delta e_1 = \Delta S_1 - \frac{1}{m} (\Delta S_2 + \Delta S_3)$$

$$E \cdot \Delta e_2 = \Delta S_2 - \frac{1}{m} (\Delta S_3 + \Delta S_1)$$

$$E \cdot \Delta e_3 = \Delta S_3 - \frac{1}{m} (\Delta S_1 + \Delta S_2).$$

Wir ersetzen jetzt die Δ durch totale Differentiale. Man überzeugt sich leicht, daß wir nun auf den gewohnten Ausdruck der Arbeit kommen, denn es wird

$$S_1\, d e_1 + S_2\, d e_2 + S_3\, d e_3 = \frac{1}{2} \cdot dJ$$

wobei

$$J = S_1{}^2 + S_2{}^2 + S_3{}^2 - \frac{2}{m} (S_1 S_2 + S_3 S_1 + S_2 S_3) \tag{10a}$$

Damit erhalten wir endlich für die Energie, bezogen auf den Zustand I

$$A_a = \frac{1}{2\,E} \cdot \int e^{S/K} \cdot dJ \tag{10b}$$

für die Energie dagegen, bezogen auf den Zustand II, d. h. auf das Einheitsvolumen des Zustandes II ergibt sich

$$A_e = \frac{1}{2\,E} \cdot e^{-S/K} \cdot \int e^{S/K} \cdot dJ \cdot \tag{10c}$$

Nur in zwei Fällen ist es also möglich die Energie für den Zustand II direkt anzusetzen, wenn nämlich S eine Konstante wird und wenn das Material jeder Volumenänderung sich widersetzt. In diesen beiden Fällen wird die Energiedichte auf die Volumeneinheit des Endzustandes bezogen

$$A_e = \frac{1}{2\,E} \cdot J. \tag{10c}$$

Die Energiedichte auf die Volumeneinheit des Anfangszustandes bezogen wird bei konstantem S

$$A_a = \frac{e^{S/K}}{2\,E} \cdot J$$

und bei unendlich großem K

$$A_a = \frac{1}{2\,E} \cdot J$$

was ja auch zu erwarten war.

Alle diese Sätze gelten natürlich nur, solange die Deformationshauptachsen nicht drehen, aber dann auch für Zylinder- und Polarkoordinatensysteme. Wir haben bisher über die Grenzen nicht gesprochen, zwischen denen die Arbeitsintegrale zu nehmen sind. Wir müssen uns dabei vorstellen, daß die S_i und e_i Funktionen eines einzigen Parameters sind, als welchen wir etwa die Lastintensität auffassen können. Das Integral ist dann von Null bis zu einem gegebenen Wert dieses Parameters zu nehmen. Eine andere Aufeinanderfolge der Belastung wird im allgemeinen auch andere Arbeitswerte ergeben.

4. Der Zug- und Druckversuch mit einem zylindrischen Stab von ideal elastischem Material

In seiner Elastizität und Festigkeit[3]) beschreibt Bach die Ergebnisse seiner Versuche mit Gummi. Er kommt dabei zu dem Resultat, daß der

[3]) C. Bach, Elastizität und Festigkeit. 1911. 6. Auflage. S. 66—76.

Elastizitätsmodulus von Gummi bei Dehnungen zunimmt, bei Verkürzungen abnimmt, wenn man die Spannungen und Dehnungen so definiert, wie wir es getan haben. Da wir von festen Elastizitätskonstanten ausgehen, kann es sich hier nur um scheinbare Änderungen handeln. Zur Aufklärung dieser Erscheinung wenden wir unsere Gleichungen auf einen sehr langen zylindrischen Stab an, der auf Zug oder Druck beansprucht wird.

Wir beziehen diesen einachsigen Spannungszustand auf ein Zylinderkoordinatensystem und geben alle Funktionen für den Endzustand.

Wir setzen $r = \bar{r} - u$ für den Abstand eines Punktes von der Achse, $z = \bar{z} - w$ für die ursprüngliche Position eines Punktes in Richtung der Achse.

Dann wird
$$dr = \overline{dr} \cdot \left(1 - \frac{\partial u}{\partial \bar{r}}\right)$$
$$dz = \overline{dz} \cdot \left(1 - \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right)$$
$$r \cdot d\varphi = \bar{r}\, d\varphi \cdot \left(1 - \frac{u}{\bar{r}}\right)$$

Da wir bei einem unbegrenzt langen Stab jeden Querschnitt als mittelsten betrachten können, muß aus Symmetriegründen $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}$ von $\bar{r}$ unabhängig sein, wir wollen zur Abkürzung dafür λ schreiben. Setzen wir $u = -\bar{r} \cdot x$, wobei x eine vorläufig unbekannte Konstante, so wird
$$\frac{\partial u}{\partial \bar{x}} = -x \quad \text{und} \quad \frac{u}{\bar{r}} = -x.$$

In den Gl. (4a) werden wir nun die Indizes 1, 2, 3 mit r, φ und z identifizieren. Es wird $S_r = S_\varphi$ und $e_r = e_\varphi = -x$, $e_z = \lambda$. Die Verhältniszahl x errechnen wir aus der Bedingung, daß am Rand und infolgedessen beim Vollzylinder durchaus $S_r = S_\varphi = 0$ sein muß, das heißt, daß
$$(1 + x)^{k + 2/3} \cdot (1 + x)^{k - 1/3} \cdot (1 - \lambda)^{k - 1/3} = 1$$
oder nach einigen kleinen Umformungen
$$x = -1 + (1 - \lambda)^{-\frac{k - 1/3}{2k + 1/3}}$$
ist. Nach Gl. (2a) ist aber
$$\frac{1}{m} = \frac{k - 1/3}{2k + 1/3}.$$

Entwickeln wir x in eine Reihe, dann erhalten wir
$$x = \frac{1}{m} \cdot \lambda + \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{1}{m} + 1\right) \cdot \frac{\lambda^2}{2} + \ldots.$$
woraus wir den Schluß ziehen können, daß m seine Bedeutung als Kontraktionskoeffizient verliert, sobald λ nicht mehr sehr klein ist. Für die Spannung S_z erhalten wir $S_z = 2G \cdot \ln \frac{1 + x}{1 + \lambda}$ und nach Einsetzen des Wertes von x und mit $2G(1 + 1/m)$
$$S_z = -E \cdot \ln(1 - \lambda) \tag{11a}$$
oder innerhalb der Konvergenzgrenzen $1 > \lambda > -1$
$$S_z = E \cdot \left(\lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{3} + \ldots\right) \tag{11b}$$

Dehnt man z. B. ein bestimmtes Stück, so daß es doppelt so lang wird, d. h. daß $\lambda = 1/2$, so wird der auf Grund der gewöhnlichen Annahmen ermittelte Elastizitätsmodulus etwa das 1,4 fache. Auch für die negativen λ erhalten wir recht gute Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen.

Die elastische Energie können wir nach Gl. (10b) berechnen. Mit
$$3 \cdot K = \frac{Em}{m - 2}$$
wird
$$A_a = \frac{1}{E} \cdot \int e^{S_z/3K} \cdot S_z \cdot d\,S_z.$$

Durch Integration zwischen den Grenzen 0 und S_z erhalten wir
$$A_a = E \cdot \frac{m^2}{(m - 2)^2} \cdot \left\{1 - e^{S_z/3K} \cdot \left(\frac{S_z}{3K} - 1\right)\right\} \tag{12}$$

Für sehr kleine Werte von $S_z/3K$ kann man in Reihen entwickeln und kommt so wieder auf den bekannten Wert
$$A_a = \frac{1}{2E} \cdot S_z^2.$$

5. Das gleichmäßige Ausdehnen einer elastischen Haut

Ein Gegenstück zu dem soeben behandelten Falle erhalten wir, wenn wir $S_r = S_\varphi =$ konst. annehmen und $S_z = 0$ stellen. Bei einer dünnen Platte, die gleichmäßig in ihrer Ebene gedehnt wird, liegt ein derartiger Spannungszustand vor. Wir geben auch hier alle Funktionen für den Endzustand und setzen
$$u = x \cdot \bar{r} \quad \text{und} \quad w = -\lambda \cdot \bar{z}$$
$$\text{also} \quad \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = -\lambda; \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{r}} = x.$$

Die Bedingung $S_z = 0$ liefert dann
$$(1 + \lambda)[(1 - x)^2(1 + \lambda)]^{k - 1/3} = 1$$
und hieraus
$$\lambda = -1 + (1 - x)^{-\frac{2k - 2/3}{k + 2/3}}.$$

Der Exponent läßt sich leicht in m ausdrücken, es wird nämlich

$$\frac{2k - {}^2/_3}{k + {}^1/_3} = \frac{2}{m - 1}.$$

Für die Spannung S_r bekommen wir $S_r = S_\varphi = 2\,G \ln\{(1-x)^{k+{}^2/_3}(1-x)^{k-{}^1/_3}(1+\lambda)^{k-{}^1/_3}\}$ oder nach einiger Umformung unter Benutzung des obigen Wertes von λ

$$S_r = S_\varphi = -\frac{E \cdot m}{m-1} \cdot \ln(1-x). \qquad (13)$$

Die Energiedichte bezogen auf das undeformierte Volumenelement wird

$$\begin{aligned} A_a &= \frac{1}{E} \cdot \int e^{S/K} \cdot \left\{ \left(S_r - \frac{1}{m} \cdot S_\varphi\right) d\,S_r \right. \\ &\quad \left. + \left(S_\varphi - \frac{1}{m} \cdot S_r\right) d\,S_\varphi \right\} \\ &= \frac{2}{E}\left(1 - \frac{1}{m}\right) \cdot \int e^{2S_r/3K} \cdot S_r\, d\,S_r \end{aligned}$$

und nach Integration zwischen den Grenzen 0 und S_r

$$\left.\begin{aligned} A_a &= \frac{E \cdot m(m-1)}{2(m-2)^2} \\ &\quad \cdot \left\{1 + e^{2S_r/3K} \cdot \left(\frac{2\,S_r}{3\,K} - 1\right)\right\} \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Wir können von den obigen Formeln eine kleine Anwendung machen. Wenn man eine dünnwandige Hohlkugel aus Gummi aufbläst, so kann man in erster Annäherung die Spannung in der radialen Richtung vernachlässigen; man hat dann den eben behandelten Fall und braucht nur den inneren Überdruck mit den Spannungen S_t in der elastischen Haut in Verbindung zu bringen. Ist h_x die jeweilige Dicke der Haut, R_x der jeweilige Radius der von innen aufgeblasenen Hohlkugel, sind ferner h und R die entsprechenden Anfangswerte, so kann man diese Größen mit den Dehnungen durch die folgenden Beziehungen verknüpfen

$$x = \frac{R_x - R}{R_x}; \qquad -\lambda = \frac{h_x - h}{h_x};$$

und

$$h_x = h \cdot \left\{\frac{R}{R_x}\right\}^{\frac{2}{m-1}}$$

nach Gl. (13) ferner

$$S_t = \frac{E \cdot m}{m-1} \cdot \ln\left\{\frac{R_x}{R}\right\}.$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung für ein kreisförmiges Stück der Haut in radialer Richtung erhalten wir dann die gesuchte Beziehung zwischen Druck und jeweiligem Kugelradius zu

$$p = 2\,E \cdot \frac{h}{R} \cdot \frac{m}{m-1} \cdot \frac{\ln(R_x/R)}{(R_x/R)^{\frac{m+1}{m-1}}}.$$

Auf diese Weise ließen sich noch eine ganze Reihe von einfachen Fällen erledigen. Besonders interessant wäre die Untersuchung von Schwingungen mit endlicher Amplitude. Wir müssen es uns aber versagen, hier näher darauf einzugehen. Nur eine Bemerkung ist vielleicht noch angebracht über unser Verhältnis zur Erfahrung. Man könnte der Meinung zugetan sein, daß die Aufstellung eines Elastizitätsgesetzes Sache der Erfahrung sei. Dies ist indessen ein Irrtum, gibt es doch keinen Körper, der nicht ein wenig plastisch würde bei so großen Verformungen, der nicht dabei gleichzeitig durch eine unzählige Menge kleiner mikroskopischer Risse seinen vormaligen Zusammenhang änderte. Sache der Erfahrung ist es freilich festzustellen, ob und inwieweit die wirklich vorkommenden Stoffe dem ideal elastischen Körper ähnlich sind, das Gesetz selbst aber spielt die Rolle eines ins intellektuelle verlängerten Meßapparates, der dem experimentellen Forscher die Ansammlung systematischer Erfahrungen erst möglich macht.

In diesem Sinn hat die experimentelle Forschung in allen über das Hookesche Gesetz hinausgehenden Gebieten der Festigkeitslehre die Mitarbeit des Theoretikers in demselben Maße nötig wie die des Instrumentenmachers, wenn sie nicht alle Übersicht und damit die technische Beherrschung der gewonnenen Erfahrungen verlieren will.

Zusammenfassung

Ein für endliche Verformungen geeignetes Elastizitätsgesetz wird abgeleitet; dabei wird gezeigt, daß die Wirkung einer neu hinzukommenden Last von der bereits vorhandenen Spannung nicht abhängt, wenn die Deformationshauptachsen stets den ursprünglichen Achsen des Koordinatensystems gleichgerichtet bleiben. Hieraus ergibt sich die Möglichkeit eines einfachen Ausdruckes für die elastische Energie sowie eine einfache Theorie für den Zugversuch mit gummiartigen Stoffen, wobei natürlich der Einfluß von bleibenden Verformungen und kleinen Rissen vernachlässigt ist.

(Eingegangen am 7. Mai 1928)