

Welche Umstände bedingen die Verfestigung bei der bildsamen Verformung von festen isotropen Körpern?

Von **Heinrich Hencky** in Delft.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 6. April 1929.)

Die materiellen Punkte des elastisch bildsamen Körpers denken wir uns gleichzeitig an zwei einander durchdringenden Gerüsten befestigt, von denen das eine einen großen Schub- und Kompressionsmodul hat, aber auch an die Plastizitätsgrenze gebundene Spannungszustände aufweist, während das andere bei sehr kleinem Schubelastizitätsmodul und verschwindendem Kompressionsmodul ideal elastisch bleibt. An dem Beispiel des einachsigen Spannungszustandes wird gezeigt, wie sich das Spannungsdehnungsdiagramm für unser Modell gestaltet und wie man im elastisch-plastischen Fall zwischen einer rein elastischen, einer latent elastischen und einer verlorenen Energie unterscheiden muß.

Einleitung. Die Untersuchungen der Festigkeitslaboratorien lassen vermuten, daß die sogenannte Verfestigung bei der bildsamen Verformung der festen Körper mit dem kristallinen Aufbau der quasi-isotropen Stoffe zusammenhängt. Jedenfalls ist sie eine experimentelle Tatsache, so daß es voraussichtlich nützlich ist, den Spannungszustand des verfestigten Materials einmal unter der Annahme vollkommener Isotropie zu untersuchen, ohne daß man sich durch den Umstand stören läßt, daß es ideal isotrope Körper gar nicht gibt.

1. Das Elastizitätsgesetz bei ideal elastischen Körpern*. Bevor wir in der Lage sind, über Abweichungen vom ideal elastischen Verhalten sprechen zu können, müssen wir das Elastizitätsgesetz für endliche Verformungen aufstellen. Der Glaube, daß es auf endliche Verformungen ja nicht ankomme, weil die plastische Deformation bereits bei sehr kleinen Verschiebungen einsetze, ist zwar teilweise berechtigt, aber im Interesse einer einwandfreien Begründung unseres Ansatzes müssen wir mit endlichen Verschiebungen rechnen.

Es sind zwei Forderungen, die wir an unseren ideal elastischen Stoff stellen. Wir verlangen erstens, daß die von außen aufgewendete Arbeit vollständig in elastische Energie umgewandelt wird, und nach Wegnahme der Last wieder ohne Verlust zurückgegeben wird.

Diese erste Forderung wird durch das Bestehen eines elastischen Potentials erfüllt, sie würde aber noch unendlich viele Elastizitätsgesetze ermöglichen. Darum verlangen wir noch zweitens eine solche Form des Elastizitätsgesetzes, daß beim Aufbringen einer neuen Last auf einen

* Vgl. ZS. f. techn. Phys. 9, 215—220 und 457, 1928.

Für die Volumenausdehnung erhalten wir:

$$\frac{\overline{dV}}{dV} = \mathcal{A} = (1 + e_1) (1 + e_2) (1 + e_3) = e^{\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3}. \quad (1d)$$

Die Größen ϵ sind die Logarithmen der Affinverhältnisse. Die wahre physikalische Spannung, auf den Endzustand bezogen, bezeichnen wir mit S_i . Die mittlere Spannung wird

$$S = \frac{1}{3} \{S_1 + S_2 + S_3\}. \quad (2a)$$

Wir sind dann imstande, ohne das Elastizitätsgesetz noch zu kennen, das Differential der verrichteten Arbeit anzugeben:

$$\begin{aligned} \delta A \cdot dx_1 dx_2 dx_3 &= S_1 \overline{dx_2} \overline{dx_3} \cdot \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_1} \cdot dx_1 + S_2 \overline{dx_3} \overline{dx_1} \\ &\cdot \frac{\partial \delta u_2}{\partial x_2} \cdot dx_2 + S_3 \overline{dx_1} \overline{dx_2} \cdot \frac{\partial \delta u_3}{\partial x_3} \cdot dx_3. \end{aligned}$$

Diese Arbeit ist auf das Volumenelement des undeformierten Zustandes bezogen; nach einiger Umformung erhält man

$$\begin{aligned} \delta A &= \mathcal{A} \left\{ \frac{S_1 \cdot \delta e_1}{1 + e_1} + \frac{S_2 \cdot \delta e_2}{1 + e_2} + \frac{S_3 \cdot \delta e_3}{1 + e_3} \right\} \\ &= \mathcal{A} \{S_1 \delta \epsilon_1 + S_2 \delta \epsilon_2 + S_3 \delta \epsilon_3\}. \end{aligned} \quad (2b)$$

Daß in diesem Ausdruck die Volumenausdehnung auftritt, ist eine Folge des Umstandes, daß die Spannung kein echter Tensor, sondern eine Tensordichte ist. Die Hauptspannungen sind also skalare Dichten. Da die Eigenwerte der Transformationsmatrix echte Invarianten sind, so kann das Elastizitätsgesetz nicht für die Größen S_i formuliert werden, wir müssen vielmehr erst eine absolute Invariante bilden

$$T_i = \mathcal{A} \cdot S_i, \quad (2c)$$

und für diese neue Größe können wir das Elastizitätsgesetz in linearer Form anschreiben. Wir erhalten mit $\epsilon = \frac{1}{3} (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)$

$$T_i = 2 G \cdot \{\epsilon_i + (\beta k - 1) \epsilon\}, \quad (3a)$$

woraus

$$T = 2 G k \cdot 3 \epsilon = 3 K \cdot \epsilon. \quad (3b)$$

Auch das Superpositionsgesetz wird sonach linear und lautet

$$\delta T_i = 2 G \cdot \{\delta \epsilon_i + (\beta k - 1) \delta \epsilon\}. \quad (3c)$$

Setzen wir die Werte von $\delta \varepsilon_i$ aus den Gleichungen (3c) in die Gleichungen (2b) ein, so erhalten wir ein totales Differential δA und durch Integration die aufgespeicherte elastische Energie in den Formen:

$$2A = \frac{1}{2G} \cdot \{(T_1 - T)^2 + (T_2 - T)^2 + (T_3 - T)^2\} + \frac{1}{K} \cdot T^2, \quad (4a)$$

$$2A = \frac{A^2}{2G} \{(S_1 - S)^2 + (S_2 - S)^2 + (S_3 - S)^2\} + \frac{A^2}{K} \cdot S^2 \quad (4b)$$

oder endlich in den Deformationskomponenten

$$2A = 2G \cdot \{(\varepsilon_1 - \varepsilon)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon)^2\} + 9K\varepsilon^2. \quad (4c)$$

Man kann diesen Ausdruck auch für den Fall, daß die Hauptachsen der Deformation Drehungen ausführen, zugrunde legen und erhält dann die Formeln für das allgemeine räumliche Problem.

2. Ein neues Modell eines plastisch-elastischen Stoffes. Wir verlassen nun das Gebiet der idealen Elastizität und wenden uns der bildsamen Formänderung zu. Nehmen wir an, daß das Material gegen allseitige Ausdehnung und Zusammenziehung unbegrenzt elastisch bleibt, eine Annahme, die durch die Auffassung der plastischen Deformation als volumentreue Raumtransformation nahegelegt wird, so bleibt als Plastizitätsbedingung nur die Aussage übrig, daß die deviatorische Invariante des Spannungstensors einen konstanten Wert hat. Diese Invariante bedeutet für den Fall, daß die Plastizität bereits bei sehr kleinen Verformungen eintritt, gleichzeitig die Energie der Gestaltänderung. Im plastischen Gebiet selbst treten dann vollkommen andere Verhältnisse ein, auf die wir sogleich zu sprechen kommen*. Sind S'_i die wahren physikalischen Spannungen an und unter der Plastizitätsgrenze, so lautet die Plastizitätsbedingung demnach:

$$(S'_1 - S')^2 + (S'_2 - S')^2 + (S'_3 - S')^2 \leq C^2. \quad (5)$$

Wie v. Mises** gezeigt hat, kann man auf diese Weise keine Theorie entwickeln, bei der stets und in allen Fällen die Deformationen durch die Spannungen bestimmt sind. Jedoch auch die Einführung von Deformationsgeschwindigkeiten anstatt der Deformationen kann als eine befriedigende Lösung nicht betrachtet werden, da dem die Tatsache der Existenz von Gleichgewichtszuständen und somit die Erfahrung widerspricht.

* Vgl. hierzu die Abhandlung von R. v. Mises, *Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen*. ZS. f. angew. Math. u. Mech. 8, 162—185, 1928.

** I. c. S. 184.

Ein verfestigtes Material hat überhaupt keine Deformationsgeschwindigkeit. Die Lösung des Rätsels dürfte darin liegen, daß der traditionelle Spannungsbegriff für einen einfach zusammenhängenden Körper eben unzureichend ist, um den Spannungszustand im verfestigten bildsamen Material darzustellen.

Unsere Absicht ist es, im folgenden ein elastisch plastisches Modell zu konstruieren, welches imstande ist, uns den Vorgang der Verfestigung mechanisch verständlich zu machen. Inwieweit sich dieses Modell an die Erfahrung anpassen läßt, wollen wir dann an dem Beispiel des einachsigen Spannungszustandes zu zeigen versuchen. Wir denken uns die materiellen Punkte an zwei einander durchdringenden elastischen Gerüsten befestigt. Die Vorstellung von einander durchdringenden elastischen Fasern ist zwar etwas ungewohnt, man braucht aber nur an ein elastisches Kraftfeld zu denken von der Art wie das elektrische Feld, um wieder zu gewohnteren Denkbildern zu kommen.

Das eine Gerüst I hat den Schubelastizitätsmodul und Kompressionsmodul, der durch den einfachen Zugversuch im elastischen Gebiet festgestellt wird, aber die Spannungen sind an eine Plastizitätsgrenze gebunden. Das andere Gerüst (II) bleibt ideal elastisch, hat aber einen sehr kleinen Schubelastizitätsmodul ($G\gamma$) und einen verschwindenden Kompressionsmodul. Außerdem wollen wir auch noch das zweite Gerüst der Relaxation unterworfen sein lassen, sehen aber der Klarheit halber vorläufig davon ab, dies in den Formeln zum Ausdruck zu bringen*.

Die Deformationsgrößen, die wir im folgenden gebrauchen werden, beziehen sich auf beide Gerüste gleichzeitig. Die Spannung unter der Plastizitätsgrenze wird

$$S'_i - S' = 2 G (1 + \gamma) (\varepsilon'_i - \varepsilon'). \quad (6a)$$

Die Volumenausdehnung Δ können wir im folgenden stets durch die Näherung $\Delta \cong 1$, $\Delta - 1 = 3 \varepsilon$ ersetzen.

Auch den durch den Versuch zu bestimmenden Beiwert γ , das Maß der Verfestigung, nehmen wir so klein an, daß wir ihn gegen die Einheit vernachlässigen können. Für die allseitige Zusammendrückung oder Ausdehnung gilt

$$S' = 3 K \cdot \varepsilon'. \quad (6b)$$

Nach Überschreiten der Plastizitätsgrenze Gleichung (5) müssen wir Gleichung (6a) aufgeben. Der Deviator der Spannungen ist also nicht

* Einen Stoff mit $\gamma = 0$ nennen wir in Anlehnung an Prandtl ideal plastisch, die Form der Plastizitätsbedingung spielt bei diesem Begriff keine Rolle.

mehr durch die Deformation bestimmt. Bezeichnen wir im folgenden stets die Spannungen und Deformationen an der Plastizitätsgrenze mit Akzenten, dann erhalten wir im plastischen Gebiet für die Endspannungen:

$$S_i - S = S'_i - S' + 2 G \gamma [(\varepsilon_i - \varepsilon) - (\varepsilon'_i - \varepsilon')] \quad (6c)$$

und

$$S = 3 K \cdot \varepsilon. \quad (6d)$$

Das erste Glied auf der rechten Seite von Gleichung (6c) muß der Bedingung Gleichung (5) genügen, braucht aber im allgemeinen nicht konstant zu sein. Das zweite gibt den elastischen Widerstand des Gerüsts II wieder. Wenn der Deviator

$$\sigma_i = (S_i - S) - (S'_i - S') \quad (6e)$$

der Ungleichung (5) genügt, also beim Einsetzen in (5) einen kleineren Wert als C^2 ergibt, ist die Entlastung vollkommen elastisch und erfolgt mit einem Schubelastizitätsmodul, der wegen der Kleinheit von γ gleich $2G$ gesetzt werden kann.

Nach der Entlastung bleibt die Spannung σ_i als Vorspannung zurück, die beiden Gerüste verspannen sich gegeneinander und rufen so die Erscheinung der Hebung der Plastizitätsgrenze bei wiederholter Belastung hervor. Eine gute Analogie hierzu erhält man, wenn man eine Gummimembran auf eine ideal plastische Blechplatte klebt und die letztere einer bleibenden Deformation unterwirft. Nach Entlastung stellt sich genau der analoge Spannungszustand ein, wie in einem verfestigten, plastischen Material. Man könnte zwar fragen, ob diese Übereinstimmung nicht etwa zufälligen Charakter hat, es liegt hier aber wirklich mehr als eine oberflächliche Analogie vor, denn die isotropen festen Körper bestehen in der Tat aus Kristallbrocken vom mittleren Schubelastizitätsmodul G und aus einer mehr oder weniger amorphen Füllmasse, unser Gerüst II mit dem mittleren Schubelastizitätsmodul $G\gamma$. Von der früher von M. Brillouin herrührenden Doppelmediumtheorie unterscheidet sich unser Modell also dadurch, daß wir seine zähe Flüssigkeit durch einen elastischen Stoff ersetzen. Die Arbeit berechnen wir nach Gleichung (2b), spalten sie aber gleich in den deviatorischen und hydrostatischen Anteil. Wir erhalten

$$2 \cdot A = \frac{1}{2G} \cdot \left\{ \left(\frac{S^2}{K} + 2 \int \{ (S_1 - S) \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon) + (S_2 - S) \delta(\varepsilon_2 - \varepsilon) + (S_3 - S) \delta(\varepsilon_3 - \varepsilon) \} \right) \right\}. \quad (7a)$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\varphi_i = (\varepsilon_i - \varepsilon) - (\varepsilon'_i - \varepsilon'), \quad (7b)$$

so erhalten wir nach Integration

$$2 \cdot A = \frac{1}{2G} \cdot \{(S'_1 - S')^2 + (S'_2 - S')^2 + (S'_3 - S')^2\} + \frac{S^2}{K} \\ + 2G\gamma \{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2\} \\ + 2 \int \{(S'_1 - S') \cdot \delta \varphi_1 + (S'_2 - S') \cdot \delta \varphi_2 + (S'_3 - S') \cdot \delta \varphi_3\}. \quad (7c)$$

Der Deviator $S'_i - S'$ ist nicht konstant, muß aber der Plastizitätsbedingung (5) genügen. Im allgemeinen hat das System also noch eine statische Unbestimmtheit in sich, die dadurch bestimmt wird, daß wir das Prinzip vom Minimum der (natürlich elastischen) Formänderungsarbeit anwenden, wie wir dies in Anlehnung an Haar und v. Kármán früher vorgeschlagen haben*. Dieses für die Statik der plastischen Massen geradezu unentbehrliche Prinzip ist insbesondere von mathematischer Seite mißverstanden worden. Auf die Ursachen, die dieses bedauerliche Mißverständnis veranlaßt haben, müssen wir daher näher eingehen.

Der mechanischen Bedeutung nach besteht die am Volumenelement geleistete Arbeit aus:

$A =$ Elastische Energie des Gerüstes I + Elastische Energie des Gerüstes II
+ Arbeit der Grenzspannungen von Gerüst I an der Plastizitätsgrenze.

Es ist nun klar, daß dieser letzte Betrag nichts mit der im Volumenelement aufgespeicherten Energie zu tun hat. Bei der Anwendung des Prinzips von Castigliano darf also nur die elastische Energie der Gerüste I und II in Rechnung gestellt werden, die Arbeit der Spannungen an der Plastizitätsgrenze ist dabei gewissermaßen als zur Arbeit der äußeren Kräfte gehörig aufzufassen.

Es fragt sich, hat die Anwendung des Prinzips von Castigliano noch einen Sinn, wenn man zum ideal plastischen Körper $\gamma = 0$ übergeht? Die Antwort darauf ist, daß die Anwendung des Prinzips vom Minimum der Formänderungsarbeit immer dann einen Sinn hat, wenn

1. ein Gleichgewichtszustand überhaupt eintritt und
2. neben dem plastischen noch ein ideal elastisches Gebiet sich ausbilden kann.

In diesem Falle wird nämlich die Deformation durch die Spannungen bestimmt. Die Abgrenzung zwischen elastischem und plastischem Gebiet stellt sich dann hierbei so ein, daß die gesamte elastische Energie ein

* Vgl. A. Haar und Th. v. Kármán, Göttinger Nachrichten 1909, S. 204; H. Henky, ZS. f. angew. Math. u. Mech. 4, 323—334, 1924; A. Nadai, Handb. d. Phys. Bd. VI, Nr. 21, S. 470—471.

Extremum wird. Die Arbeit der Spannungen an der Plastizitätsgrenze geht direkt in Wärme über und liefert den von der Verformungsgeschwindigkeit unabhängigen Arbeitsverlust, der sich bei Versuchen in unmittelbarer Nähe der Plastizitätsgrenze stark bemerkbar macht.

3. Der Zug- und Druckversuch und der Bauschingereffekt. Wir gehen zu einem Zugversuch an unserem Modell über.

Wir erhalten für das elastische Gebiet, wenn wir die Achse des Stabes in die Richtung $i = 3$ legen und $\lambda \cong 1$ setzen, für die Dehnungen

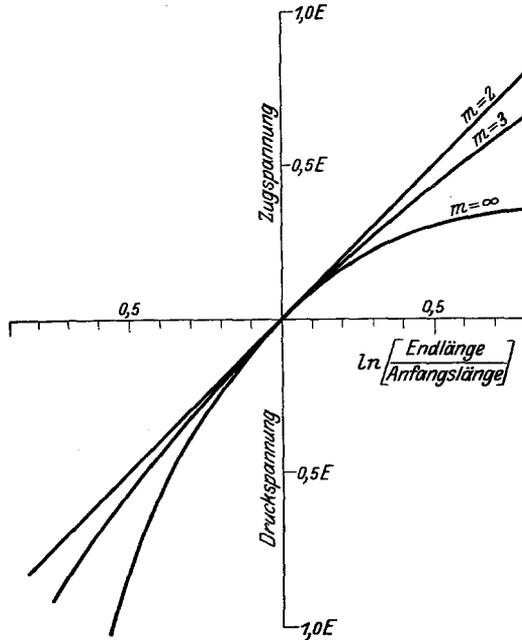


Fig. 1. Ideale Elastizität beim Zug- und Druckversuch.

$\epsilon'_1 = \epsilon'_2$, für die Spannungen $S'_1 = S'_2 = 0$ und unter Berücksichtigung des Wertes $k = \frac{1}{3} \cdot \frac{m+1}{m-2}$ nach Gleichung (3a)

$$\left. \begin{aligned} \epsilon'_1 &= -\frac{1}{m} \cdot \epsilon'_3, \\ S'_3 &= 2G(\epsilon'_3 - \epsilon'_1) = 2G \cdot \frac{k + \frac{2}{3}}{2k + \frac{1}{3}} \cdot \epsilon'_3 = E \cdot \epsilon'_3. \end{aligned} \right\} \quad (8a)$$

Dies ist das Gesetz von Hooke in seiner verallgemeinerten Form, wie es für wenig zusammendrückbare Stoffe, wie z. B. Gummi, Verwendung finden kann. Fig. 1 zeigt auch die Spannungsdehnungsdiagramme, wenn die Volumenausdehnung nicht mehr gegen die Einheit vernachlässigt

werden darf. Die Bedeutung der Querkontraktionsziffer bleibt im elastischen Gebiet dieselbe wie in der elementaren Theorie. Nach Eintritt der Plastizität finden wir aus den Belastungsgleichungen (6c) und (6d) und den Randbedingungen $S'_1 = S'_2 = S'_1 = S'_2 = 0$ und $S' = \frac{1}{3} \cdot S'_3$;
 $S = \frac{1}{3} \cdot S_3$

$$\begin{aligned} S &= K(2\varepsilon_1 + \varepsilon_3) & 3\varepsilon &= 2\varepsilon_1 + \varepsilon_3, \\ S_1 &= S + S'_1 - S' + 2G\gamma \cdot \varphi_1, \\ S_3 &= S + S'_3 - S' + 2G\gamma \cdot \varphi_3. \end{aligned}$$

Als gegeben sehen wir die Endspannungen S_3 und die Spannung an der Plastizitätsgrenze S'_3 an. Die Dehnungen φ_i werden dann:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{S_3 - S'_3}{2G\gamma}; \quad \varphi_3 = +\frac{2}{3} \cdot \frac{S_3 - S'_3}{2G\gamma}; \quad (8b)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 = \varepsilon_2 &= -\left\{ \frac{1}{3} \cdot (S_3 - S'_3) \left(\frac{1}{2G\gamma} - \frac{1}{3K} \right) + \frac{S'_3}{mE} \right\}, \\ \varepsilon_3 &= +\frac{1}{3} \cdot (S_3 - S'_3) \left(\frac{1}{G\gamma} + \frac{1}{3K} \right) + \frac{S'_3}{E}. \end{aligned} \right\} \quad (8c)$$

Besonderes Interesse beansprucht die Berechnung der Energie, welche als Reibungsarbeit verloren geht. Nach Formel (7c) erhalten wir allgemein für die Arbeit der Reibungskräfte

$$A_v = \int \{ (S'_1 - S') \delta \varphi_1 + (S'_2 - S') \delta \varphi_2 + (S'_3 - S') \delta \varphi_3 \}. \quad (8d)$$

Es ist eine Eigentümlichkeit der plastischen Deformation, daß bei ihr der Unterschied zwischen äußerer und innerer Arbeit in gewisser Beziehung seinen Sinn verliert. Dieser Umstand hat zu der unverdienten Nichtbeachtung, die man der bereits zitierten, vor 20 Jahren verfaßten Arbeit von Haar und v. Kármán entgegenbrachte, nicht wenig beigetragen.

Die in der Fig. 2 schraffierten Teile geben eine Übersicht über die Verteilung der Energie. Im vorliegenden Falle erhält man

$$A_v = S_3 \cdot \varphi_3 = \frac{1}{3} \frac{1}{G\gamma} \cdot S'_3 \cdot (S_3 - S'_3).$$

In Fig. 2 ist vergleichsweise auch die gewöhnliche Methode angegeben, die Dehnungen in Prozenten der ursprünglichen Länge zu messen. Man sieht, daß unser logarithmisches Maß nichts als eine kleine Maßänderung verlangt, die durch die großen Vorteile einer zu Anfangs- und Endzustand symmetrischen affininvarianten Messung der Dehnung gerechtfertigt wird.

In der Fig. 2 ist noch die Kurve der auf den ursprünglichen Querschnitt bezogenen Spannungen dargestellt, wie sie von den Prüfungs-
maschinen aufgezeichnet wird.

Besonders einfach, um nicht zu sagen trivial, läßt sich mit unserem
Modell der Bauschinger Effekt erklären. Denken wir uns einen Gummistab und einen ideal plastischen Stab aneinandergeklebt. Der Gummistab sei Repräsentant des elastischen Gerüsts II. Dehnen wir erst über die

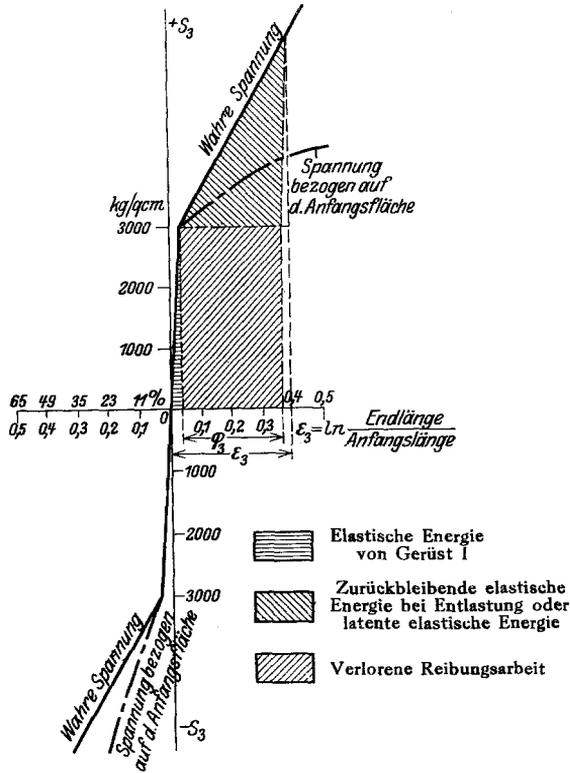


Fig. 2. Der Zug- und Druckversuch im elastisch-plastischen Gebiet.

Plastizitätsgrenze, entlasten und drücken den Stab zusammen, bis wir die Plastizitätsgrenze in der Druckrichtung erreichen, so wird diese (konstante) Grenze natürlich früher erreicht, da der Gummistab nun belastend wirkt. Wegen des viel kleineren Schubmoduls kann er ja nicht im elastischen Gebiet die zu seiner vollen Entspannung nötige Deformation erreichen. Der Verfestigungsbeiwert γ kann also auf zwei Arten nachgeprüft werden, einmal durch den Arbeitsverlust, sodann durch den Bauschinger Effekt. Freilich wird sich bei den Versuchen eine andere

Erscheinung störend bemerkbar machen, die Relaxation, worunter wir die Absorption der elastischen Energie des Gerüsts II durch die Wärmebewegung der Atome verstehen. Wir schließen jedoch für die aus Kristallen aufgebauten Stoffe die Energie des Gerüsts I ausdrücklich von der Relaxation aus, da dies mit der Erfahrung in Widerspruch stehen würde. Die Annahme einer Relaxation im Maxwellschen Sinn für die festen Körper wurde bereits durch v. Kármán als ein verbesserungsbedürftiger Teil der Maxwellschen Auffassung angesehen und, wie wir sehen, läßt sich die Verbesserung ganz ungezwungen anbringen.

Zusammenfassung.

Auf Grund eines absoluten Dehnungsmaßes, das nicht auf unendlich kleine Verschiebungen beschränkt ist, wird zunächst die Elastizitätstheorie erweitert. Der hierdurch entstehende ideal elastische Körper hat für die Mechanik der Kontinua ebenso große Bedeutung wie der ideal starre Körper.

Das plastische Material wird als zusammengesetzt aufgefaßt, der eine aus Kristallbrocken bestehende Teil hat die unter der Elastizitätsgrenze meßbaren Eigenschaften des Stoffes, der andere Bestandteil, die Füllmasse zwischen den Kristallkörnern, ist ideal elastisch, hat aber einen so kleinen Schubmodul, daß das Dasein dieses Bestandteiles erst an der Plastizitätsgrenze infolge der großen Gleitbewegungen der Kristalle in Erscheinung tritt.

Durch diese schematische Berücksichtigung des kristallinen Aufbaues der festen Körper wird die Erklärung des Spannungsdehnungsdiagramms, so wie es wirklich ist, ermöglicht, sowie der Bauschingereffekt verständlich gemacht.

Die Bedenken gegen die Anwendung der Methode von Haar und v. Kármán erklären sich aus der begrifflichen Schwierigkeit, die die Nichtumkehrbarkeit des plastischen Deformationsvorgangs in das Problem hineinträgt, bei entsprechender Vorsicht in der Anwendung ist jedoch gegen diese Methode, die für die Statik der plastischen Massen unentbehrlich ist, sachlich nichts einzuwenden, um so mehr, als man in der Baustatik die ganz analoge Aufgabe, die Berechnung eines mehrfach statisch unbestimmten Systems bei Nachgeben fester Stützpunkte, ohne überflüssige Skrupel längst gelöst hat.
