Über die Beziehungen der Philosophie des „Als Ob“ zur mathematischen Naturbeschreibung.

Von

Heinrich Hencky in Dresden.

In der mathematischen Physik und ganz besonders in der technischen Mechanik finden wir einen solchen Wandel von Hypothesen und grundlegenden Voraussetzungen, daß heute auch der mehr technischen Zielen zugewandte Forscher schwer umhin kann, sich mit den erkenntnistheoretischen Grundlagen seiner Spezialwissenschaft auseinanderzusetzen.

Ohne die Erkenntnis der Gesetzmäßigkeiten bei der Bildung von Hypothesen und Fiktionen, welche dazu dienen sollen, die Vorgänge der Natur in ihren uns wichtigen Zügen wiederzugeben, ist es heute unmöglich, sich einen Überblick über das große Gebiet der mathematischen Naturbeschreibung zu verschaffen.

An Hand von Beispielen zu zeigen, welche Dienste hier die Philosophie des „Als Ob“ zu leisten imstande ist, ist der Zweck der folgenden Zeilen.

Das erste Beispiel entnehmen wir der technischen Mechanik.

Stellen wir uns das rotierende Schwungrad einer Maschine vor und versuchen wir, die Prinzipien der mathematischen Naturbeschreibung darauf anzuwenden.

Wir finden zunächst, daß wir eine hinreichende Annäherung an das dynamische Verhalten bekommen, wenn wir das Schwungrad betrachten, als ob es ein starrer Körper von bestimmter Masse wäre. Die lebendige Kraft ergibt sich dann hinreichend genau aus der Umdrehungszahl in der Minute.

Wir lassen jetzt die Geschwindigkeit zunehmen und bringen einen selbstregistrierenden Drehungsmesser am Radkranz an. Das Diagramm zeigt uns dann, daß einer bestimmten Änderung der Geschwindigkeit eine Änderung der Dehnung des Radkranzes entspricht. Die Fiktion des starren Körpers ist also zu grob, um die physikalische Wirklichkeit in dem uns erwünschten Umfange wiederzugeben. Sofort ist unser Verstand bereit, eine neue Fiktion zu schaffen, welche der Wirklichkeit näher kommt und die erste als Grenzfall erhält. Es ist dies der Begriff des elastischen, dem Hookeschen Gesetz gehorchenden Kontinuums. Das ist die zweite Näherung.

Lassen wir jetzt die Geschwindigkeit noch weiter zunehmen, so werden sich bleibende Dehnungen zeigen und schließlich wird ein Bruch eintreten, das Schwungrad wird zerspringen.

Und hier stehen wir schon an der Grenze unserer gegenwärtigen Naturerkenntnis.

Wir können unseren Begriff des elastischen Kontinuums erweitern, indem wir für den Zusammenhang zwischen Dehnungen und Spannungen ein nichtlineares Gesetz annehmen; wollen wir auch den Bruch in unsere Überlegungen einbeziehen, so müssen wir unsere Reihe abbrechen, sie wird zu umständlich.

Wir können dann auf die Moleküle übergehen, d. h. eine grundsätzlich neue Reihe von Fiktionen ansetzen, welche mehr Aussicht auf Erfolg verspricht.

Das Verfahren unseres Verstandes bei diesen Reihenentwicklungen in Fiktionen können wir mit dem als Taylorsche Reihe bekannten mathematischen Theorem in Parallele stellen.

Betrachten wir zunächst dieses Symbol unserer mathematischen Naturbeschreibung, von dem wir im Laufe der folgenden Betrachtungen noch wichtige Anwendungen machen wollen.

Bekanntlich ermöglicht die Taylorsche Reihe die Darstellung einer Funktion, etwa als Kurve gedacht, in unmittelbarer Nähe eines bestimmten Punktes durch eine nach Potenzen des Abstandes von diesem Punkte ansteigende Reihe. Beschränken wir uns auf die unmittelbare Nachbarschaft dieses Punktes, so ist die Reihe sehr konvergent, wenn die darzustellende Funktion stetig ist.

Die Koeffizienten der Reihenglieder sind ganz von dem Charakter der darzustellenden Funktion in der Nähe des Ausgangspunktes abhängig. Geometrisch gesprochen, kommt diese Entwicklung darauf hinaus, die Kurve so zu betrachten, als ob sie eine gerade Linie, als ob sie eine Parabel, als ob sie eine Kurve von bestimmter beliebig hoher Ordnung wäre.

Unsere mathematische Naturbeschreibung ist nun ganz analog mit einer solchen Reihenentwicklung, wenn wir die aufeinander-folgenden Fiktionen mit dem ersten Glied, mit der Summe der ersten zwei Glieder, mit der Summe der ersten drei Glieder usw. vergleichen.

Es ist auch immer eine Annäherung in der nächst höheren enthalten wie bei den Fiktionen, z. B. starrer Körper, elastisches Kontinuum.

Die Koeffizienten der Reihentwicklung, d. h. die durch die Annahme einer Fiktion noch nicht bestimmten Parameter werden aus der Erfahrung entnommen. Wenn letztere nicht umfassend genug hierzu ist oder wenn wir aus praktischen Gründen auf eine noch höhere Annäherung keinen Wert legen, wird die Reihe der Fiktionen abgebrochen.

Jetzt nehmen wir als zweites Beispiel eine Flüssigkeit, die an einem Hindernis vorbeiströmt.

Eine erste Annäherung gibt uns die Fiktion der unzusammendrückbaren reibungsfreien Flüssigkeit, d. h. eines Kontinuums, dessen einzelne Teile sich ohne Widerstand gegeneinander verschieben lassen.

Berechnen wir jetzt auf Grund dieser Fiktion den Widerstand, den das Hindernis erfährt, so finden wir keinen im Widerspruch mit der Erfahrung. Die erste Annäherung ist hier ein Mißerfolg, wenn es uns gerade um den Widerstand zu tun war.

Die zweite Annäherung ist die Fiktion einer reibenden, d. h. zähen, unzusammendrückbaren Flüssigkeit. Die Differentialgleichung, welche das Gesetz dieser Fiktion ausspricht, gibt wenigstens die langsame Bewegung reibender Flüssigkeiten richtig wieder.

Eine weitere Annäherung würde die turbulente Bewegung, die Zusammendrückung, die thermischen Vorgänge usw. berücksichtigen müssen, wir wollen dies an dieser Stelle nicht weiter verfolgen. Beachten wir aber, daß jede höhere Annäherung alle von geringerer Annäherung als Spezialfälle enthalten muß.

Ein drittes Beispiel entnehmen wir der kinetischen Gastheorie. Danach wird der Druck eines Gases durch die Stöße einer Anzahl gleicher Moleküle auf die Wände erzeugt. Dabei haben wir zunächst keine Veranlassung, die Moleküle anders als unteilbare Einheiten zu fingieren.

Die Erscheinungen der Spektralanalyse, der Elektrodynamik und der Radioaktivität machen aber eine zweite Annäherung nötig. Danach ist in jedem Atom ein positiv elektrisch geladener

Kern von einer Anzahl negativ geladener Elektronen umgeben, welche ihn umkreisen wie die Planeten die Sonne.

Hier ist allerdings zu beachten, daß von vielen Forschern die Molekulartheorie nicht als Fiktion, sondern als physikalische Hypothese aufgefaßt wird. Bei Fiktionen sind wir uns dagegen von vornherein klar, daß die Wirklichkeit nichts damit zu tun hat, wenn sich nur praktisch alles so verhält, als ob die Fiktion wahr wäre.

Fassen wir das Resultat kurz zusammen:

Jedes Problem der mathematischen Naturbeschreibung erfordert also zwei Tätigkeiten

1. eine schöpferische Tätigkeit des Verstandes, die Erzeugung einer geeigneten Reihe von Fiktionen und die rein rechnerische Aufgabe der Lösung der Differentialgleichungen, welche durch den Charakter der einzelnen Fiktionen definiert werden,

2. eine prüfende Tätigkeit der Erfahrung und die Bestimmung der durch die Fiktionen selbst noch nicht gegebenen unbestimmten Parameter. Solche Parameter sind z. B. der Elastizitätsmodul in der Festigkeitslehre, die Zähigkeit in der Hydrodynamik.

Wenden wir uns jetzt der Geometrie zu, der ja in der Regel die Rolle einer Erkenntnis a priori zugewiesen wird.

Durch die Entwicklung der nichteuklidischen Geometrien wurde eine Revolution auf diesem Gebiete hervorgerufen, welche auch auf die Philosophie nicht ohne Einfluß geblieben ist.

Auf verschiedenen Wegen kann man in dieses neugeschaffene von den Philosophen als Metageometrie bezeichnete Gebiet eindringen.

Man kann unter Aufgabe des Parallelenaxiomes die neue Geometrie nach Art des Euklid aufbauen, man kann aber auch, gestützt auf die Forschungen von Gauss und Beltrami von der bekannten euklidischen Differentialgeometrie aus vordringen.

Bezeichnet man mit Gauss als Krümmung einer Kurve den reziproken Wert des Krümmungsradius an der betrachteten Stelle, so gibt es in jedem Punkt einer Fläche zwei aufeinander senkrechte Richtungen, welche die Krümmung an diesem Punkt für jede beliebige Schnittrichtung charakterisieren. Das Produkt der Krümmungen in diesen Richtungen bezeichnet Gauss als das Krümmungsmaß der Fläche. Gauss hat bewiesen, daß man Flächen mit konstantem gleichen Krümmungsmaß aufeinander abwickeln kann.

So ist z. B. die euklidische Ebene, welche das Krümmungsmaß 0 hat, abwickelbar auf Zylinder und Kegelflächen, für welche ja ebenfalls das Krümmungsmaß verschwindet.

Die hyperbolische Ebene Lobatschefskys hat nun ganz ebenso die Eigenschaft der Abwickelbarkeit auf eine Fläche konstanten negativen Krümmungsmaßes in unserem euklidischen Raum, wie die euklidische Ebene auf einen Kegel oder Zylinder. Ebenso läßt sich die sphärische Ebene Riemanns auf eine Kugel von entsprechend gleichem Krümmungsmaß abwickeln, ja geradezu identifizieren mit der Kugelfläche.

Man kann daher die Sätze der nicht euklidischen ebenen Geometrien anschaulich machen, indem man als Gerade die sogenannten geodätischen Linien betrachtet, worunter man die kürzesten Verbindungslinien zweier Punkte versteht, welche aber ganz auf den entsprechenden Flächen konstanten positiven oder negativen Krümmungsmaßes liegen müssen. Die nicht euklidischen Geometrien verlieren auf diese Weise den Charakter des mystischen, der der Bezeichnung Metageometrie anhaftet.

Schwieriger wird die Aufgabe der räumlichen Vorstellung, wenn wir zu drei dimensionalen nichteuklidischen Räumen übergehen. In diesen Räumen gibt es nämlich nichts, was der Bewegung eines starren Körpers im euklidischen Raum ähnlich wäre, daher die Schwierigkeit der Vorstellung. Die Fiktion des starren Körpers ist als Denkgewohnheit so fest in uns eingewurzelt, und wird uns durch die große Annäherung der Erfahrung an diese Fiktion so nahegelegt, daß man schon seine Existenz der Sache widmen müßte, wenn man sich von den Fesseln dieser Fiktion ganz befreien wollte.

Um das Wesentliche kurz zusammenzufassen:

Die Geometrie ist zu dem Begriff eines Raumes vorgedrungen, der von einem Parameter, vom Krümmungsmaß abhängig ist. Unsere euklidische Geometrie, welche solange das Feld behauptet hatte, hat zu der bescheidenen Rolle eines speziellen Falles dieses allgemeinen Raumes herabsteigen müssen, welcher nur im unendlich kleinen genau zutrifft.

Nun steht aber eine wichtige und bis vor kurzem noch umstrittene Frage vor uns. Welchen Charakter hat unser Erfahrungsraum, der Raum, den wir in der mathematischen Physik verwenden? Welche Geometrie ist die richtige?

Die Antwort ist einfach. Die Erfahrung legt uns zunächst einen euklidischen dreidimensionalen Raum nahe. Aber nicht weil sie absolut wahr wäre, wählen wir die euklidische dreidimensionale Geometrie, sondern weil sie in einem gewissen höheren Sinne das erste Glied einer sehr konvergenten Reihenentwicklung ist, genau in derselben Weise, wie die Tangente an eine Kurve als das erste Glied einer Reihenentwicklung betrachtet werden kann, welche die Darstellung der Kurve zum Zweck hat.

Wenn wir uns beim Raum mit dem ersten Glied begnügen, so tun wir das nur, weil uns die Erfahrung die Daten, das Krümmungsmaß unseres Raumes zu bestimmen, nicht so aufdrängt, wie dieses erste Glied selbst.

Die Geometrie ist also eine Wissenschaft a priori, weil sie sich wie die Arithmetik mit Schöpfungen unseres Verstandes beschäftigt. Wenden wir sie aber an, so wird sie sofort zu einem Teil der Physik und Näherungsmathematik.

Aber die Konsequenz zwingt uns zu noch radikalerem Vorgehen. Wir haben auch kein Recht, einen Raum mit konstantem Krümmungsmaß anzunehmen. Wollen wir die physikalische Wirklichkeit widerspruchsfrei beschreiben, so müssen wir übergehen zu dem Begriff eines Raumes mit zeitlich und räumlich veränderlichem Krümmungsmaß oder richtiger Krümmungstensor.

Daß, den Charakter unseres Raumes zu bestimmen, eine Aufgabe der Physik und nicht der Metaphysik ist, diesen Standpunkt hat, abgesehen von Mach, besonders der englische Mathematiker Clifford in seinen Vorlesungen über philosophische und erkenntnistheoretische Fragen vertreten.

Clifford[1]) hat schon vor einem halben Jahrhundert die Meinung ausgesprochen, es möchten die physikalischen Erscheinungen der Elektrizität und des Magnetismus sich auf eine kleine zeitliche und räumliche Veränderlichkeit des Krümmungstensors unseres Erfahrungsraumes zurückführen lassen, während bei Annahme des starren euklidischen Raumes die Notwendigkeit zur Erzeugung physikalischer Hypothesen besteht, die vielleicht ganz unnötig sind.

Clifford hat seinen Gedanken nicht weiter verfolgt. Erst die Entdeckung Einsteins von der physikalischen Sinnlosigkeit des

---

[1]) Der Clifford'sche Gedanke hat in der Weyl'schen Erweiterung der Einstein'schen Relativitätstheorie seine theoretische Ausgestaltung erfahren, freilich in ganz anderer Weise, als Clifford sich dieselbe vorstellte. Vergleiche hierzu W. K. Clifford, Der Sinn der exakten Wissenschaft. Übersetzt von Kleinpeter. 4. Auflage. Leipzig 1913.

Gleichzeitigkeitsbegriffes der Galilei-Newtonschen Mechanik für verschiedene Bezugsysteme hat das Hindernis beseitigt, das der Bildung einer zweiten Annäherung im Wege stand.

Die Schwierigkeiten, welche die Fiktion eines von Zeit und Materie unabhängigen dreidimensionalen Raumes mit sich bringt, hat schon Mach in seiner Mechanik gelegentlich seiner Kritik der Newtonschen Prinzipien aufgedeckt.

Newton will die Existenz einer absoluten Bewegung an dem Beispiel eines rotierenden Wassergefäßes zeigen. In dem Maße, als das Wasser durch die Wandreibung in Rotation versetzt wird, zeigt sich die Wirkung dieser Bewegung durch eine Krümmung der Niveaufläche. Newton betrachtet also die Fliehkräfte als Kennzeichen einer Bewegung gegen einen fingierten unbeweglichen Raum.

Mach bemerkt hierzu, daß dieses Experiment keine Beweiskraft hat für den, der den Begriff der absoluten Bewegung ablehnt, weil wir ja nicht das Wassergefäß festhalten, dafür aber den Fixsternhimmel in Drehung versetzen und dann das Fehlen der Fliehkräfte nachweisen können.

Diese Bemerkung Machs ist geradezu ein Wegweiser zur allgemeinen Einsteinschen Relativitätstheorie.

Ganz ähnliche Schwierigkeiten haben sich auch durch die Entwicklung der Elektrodynamik herausgestellt. Der französische Mathematiker Poincaré gibt in seinen erkenntnistheoretischen Schriften, welche noch kurz vor den Veröffentlichungen Einsteins erschienen sind, eine auch dem Nichtphysiker verständliche Darlegung dieser Schwierigkeiten und sucht sich ein Bild von einer künftigen Physik zu machen, welche die Galilei-Newtonsche Mechanik als Spezialfall für unendlich große Lichtgeschwindigkeit enthält.

Einstein hat nun, wenn wir unsere gewöhnliche Mechanik als erste Näherung betrachten, die nächsten zwei Glieder der Reihe eingeführt.

Die zweite Näherung ist die spezielle Relativitätstheorie, welche sich in von Gravitationsfeldern freiem Raum ergibt.

Die spezielle Relativitätstheorie bedient sich eines vierdimensionalen raumzeitlichen Kontinuums mit konstanter positiver Krümmung, wobei neben den drei Raumkoordinaten die mit der Lichtgeschwindigkeit multiplizierte Zeit als vierte Koordinate verwendet wird. Die spezielle Relativitätstheorie vereinigt also Raum und Zeit zu einer Einheit.

Die allgemeine Relativitätstheorie dagegen vereinigt Raum, Zeit und Materie zu einer Einheit. Hier gibt es keine Trägheit gegen den Raum, wie in der Galilei-Newtonschen Mechanik, sondern nur eine Trägheit der Massen gegeneinander. Bei geeigneter Festsetzung krummliniger vierdimensionaler Koordinaten kann die in jedem Weltpunkte vorhandene Substanz als ruhend aufgefaßt werden, daher die Bezeichnung des Prinzips als Relativitätsprinzip.

Die geometrischen Eigenschaften des Raumes sind nun nicht mehr selbständig, denn der Krümmungscharakter des Raumes ist zeitlich und örtlich variabel. Die mittlere Raumkrümmung bleibt aber positiv, so daß die Welt einen endlichen Inhalt hat.

Auch die vierdimensionale Welt Einsteins und Minkowskis ist nicht das letzte Wort, sondern nur eine vorläufige Näherung. Schon Clifford hat darauf aufmerksam gemacht, daß die Annahme von drei Raumdimensionen dort, wohin die unmittelbare Erfahrung nicht dringen kann, in der Welt der Moleküle und Atome, durchaus willkürlich ist.

Aber noch von einer anderen Seite her scheint sich eine neue Auffassung vorzubereiten. Auch die Betrachtung der Welt, als ob sie ein Kontinuum sei, wird durch das Aufkommen und die immer größer werdenden Erfolge der statistischen Physik in ihrer Bedeutung eingeschränkt. Liegt doch der Ausdehnung der atomistischen Betrachtung auf die Energie in der modernen Quantentheorie die bewußte Aufgabe des Prinzips zugrunde, die Natur mache keine Sprünge.

Keine einzige von den Fiktionen, aus denen sich das wissenschaftliche Weltbild zusammensetzt, ist gegen Umbildung mit dem Fortschritt unserer experimentellen Naturerkenntnis sicher. Eine Fiktion andererseits, die einmal eine brauchbare Näherung bildete, wird immer als Spezial- und Grenzfall in einer allgemeineren Fiktion weiterleben.

Fassen wir das Resultat unserer Betrachtungen noch einmal zusammen:

Um die sinnlich gegebene Welt zur Denkbarkeit zu ergänzen, brauchen wir Denkmittel, welche in ihren Funktionen unseren physischen Werkzeugen ähnlich sind. Diese Denkmittel sind Schöpfungen unseres Verstandes, daher von der Erfahrung nicht mehr beeinflußt, sobald sie einmal gebildet sind. Aber eben weil dies so ist, sind sie tot und nur durch beständige Umbildung und Anpassung an die Wirklichkeit erhalten sie ihr Leben.

Synthetische Urteile a priori beziehen sich stets auf das Reich der Fiktionen, und nicht unmittelbar auf die Wirklichkeit. Alles, was den Charakter des Starren, Absoluten hat, ist schon dadurch als Fiktion, und daher Annäherung gekennzeichnet.

Wie kommt es aber, daß so gut konvergente Reihenentwicklungen überhaupt möglich sind, mit anderen Worten, warum ist eigentlich unsere Umwelt so verhältnismäßig stabil?

Es scheint das ganze Universum einer Art Trägheitsgesetz zu gehorchen. Ohne diese Trägheit des Universums wäre es wohl überhaupt unmöglich, Wissenschaft zu entwickeln. Ist doch die Absicht des naturwissenschaftlichen Denkens die Anwendung gemachter Erfahrungen auf neue Umstände. Eine derartige Anwendung setzt aber eine gewisse Gleichförmigkeit im Gange der Naturereignisse voraus.

Unsere Wissenschaft beruht eben unter Ausnutzung dieser universellen Trägheit auf einem der Taylorschen Reihenentwicklung analogen Verfahren, welches wir im großen und im kleinen auf das Weltganze anwenden.

Der ganze Übergang von der Fernwirkung zur Nahewirkung in der modernen Physik ist nur die folgerichtige Durchführung und Ausgestaltung dieses Verfahrens. Ja, es läßt sich behaupten, daß die Taylorsche Entwicklung in einem gewissen Sinne allen Näherungstheorien in Wissenschaft oder Technik offen oder versteckt zugrunde liegt.

Angelangt am Schlusse unserer Betrachtungen werfen wir noch einen Blick auf die Gesamtheit dessen, was wir unsere heutige Wissenschaft nennen. Dürfen wir hoffen, daß unser Bestreben nach Erkenntnis befriedigt wird oder müssen wir wie Du Bois Reymond in seiner bekannten Rede über die Grenze des Naturkennens bekennen „Ignoramus et ignorabimus".

Was wir nach Du Bois Reymond niemals wissenschaftlich erfassen können, das ist vor allem das Geheimnis des Lebens und des Bewußtseins. Niemals kann man Leben und Bewußtsein zurückführen auf Bewegung von Atomen und Elektronen oder andere fiktive Mechanismen, denn diese Mechanismen existieren ja zunächst nur in dem Bewußtsein, welches sie erklären sollen. Damit hätten wir aber das bekannte Analogon zu dem Freiherrn von Münchhausen, der sich am eigenen Zopfe aus dem Sumpfe zieht.

Trotzdem ist der Weg zur Überwindung dieses Widerspruchs am Leitfaden der Analogie leicht zu finden.

Es gibt eben überhaupt keine absolut tote Materie. Zur Fiktion einer Materie, welche des Lebens und Bewußtseins vollständig beraubt ist, haben wir nicht mehr Recht als zur Fiktion eines absolut starren Körpers.[1]) Es sind dies nur Hilfsbegriffe und erste Näherungen.

Daraus folgt, daß unsere ganze heutige Wissenschaft, soweit sie sich auf den Begriff der toten Materie stützt, nur das erste Glied einer Reihe, eine erste Näherung darstellen kann.

Wenn wir diese Fiktion der toten Materie in konsequenter Weise zu Ende denken, und die Widersprüche uns eingestehen, dann werden sich einmal diese Widersprüche notwendig zu der zweiten Näherung zusammenschließen müssen, welche unsere jetzige Wissenschaft als Spezialfall enthält, so sehr sich im übrigen auch diese künftige Wissenschaft von der jetzigen unterscheiden wird.

Mag daher auch für das einzelne Individuum das Wort „ignoramus et ignorabimus“ volle Berechtigung haben, für den menschlichen Erkenntnistrieb gibt es keine feststellbaren Schranken und keine unlösbaren Fragen, vor denen er sich bescheiden müßte.

---

[1]) Vergleiche hierzu die Abhandlung W. K. Clifford's: On the nature ot things-in-themselves. Lectures and Essays vol. II S. 71. London 1879.