Gelegentlich dieser Versuche wurden auch die Dehnungen in Richtung der mittleren Hauptspannung mit groben Mitteln gemessen. Sie erwiesen sich als klein nur bei Deformationen mit Spannungszuständen mit annähernd $\mu = 0$. Ueber das quantitative Gesetz dieser »mittleren Dehnungen« können wir noch nichts behaupten. Jedenfalls tritt eine plastische Dehnung in Richtung der mittleren Hauptspannung nicht nur dann ein, wenn diese gleich einer der äußeren Hauptspannungen ist.

Die gleichen Versuche wie die beschriebenen wurden auch an Kupferrohren gemacht, bisher jedoch in geringer Anzahl. Aus ihnen kann zurzeit nur mitgeteilt werden, daß sie wenigstens quantitativ dieselben Ergebnisse lieferten wie die an Flußeisen.

11. Die Bewegungsgleichungen beim nichtstationären Fließen plastischer Massen.

Von **HEINRICH HENCKY** in Delft.

Im elastischen Gebiet läßt sich das Gesetz zwischen Spannungen und Dehnungen in folgender Form aussprechen:

1. Die Raumausdehnung ist proportional dem hydrostatischen Teil des Spannungszustandes

$$1/3\,(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \frac{m-2}{m\,E}\,1/3\,(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad \text{oder} \quad \varepsilon = \frac{m-2}{m\,E}\,p$$

$$\text{mit } \varepsilon = 1/3\,(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \text{ und } p = 1/3\,(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad \ldots \quad (1).$$

2. Der Deviator der Deformationen ist proportional dem Deviator der Spannungen. (Den Deviator erhält man bekanntlich aus dem Tensor, wenn man das arithmetische Mittel der Normalkomponenten von jeder Normalkomponente abzieht):

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x - \varepsilon &= \frac{1}{2\,G}(\sigma_x - p), & 1/2\,\gamma_{xy} &= \frac{1}{2\,G}\,\tau_{xy} \\ \varepsilon_y - \varepsilon &= \frac{1}{2\,G}(\sigma_y - p), & 1/2\,\gamma_{xz} &= \frac{1}{2\,G}\,\tau_{xz} \\ \varepsilon_z - \varepsilon &= \frac{1}{2\,G}(\sigma_z - p), & 1/2\,\gamma_{yz} &= \frac{1}{2\,G}\,\tau_{yz} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2).$$

Wir verwenden im folgenden zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen des plastischen Körpers den Riccikalkül, der durch den polaren Gegensatz zwischen kontravarianten und kovarianten Komponenten und die dadurch erzeugte Invarianz vom Koordinatensystem allein imstande ist, das Formelgestrüpp zu vermeiden, das bisher die Berechnung endlicher elastischer oder plastischer Verschiebungen verhindert hat.

Den fundamentalen metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ denken wir uns gegeben und zwar als eine Funktion auch der Zeit, und behalten uns vor, ihn später zu spezialisieren.

Das Elastizitätsgesetz lautet dann in kovarianter Form, wenn der volle Spannungstensor

$$P_{\mu\nu} = p\,g_{\mu\nu} + p_{\mu\nu} \quad \ldots \quad (3\,\text{a})$$

und der volle Deformationstensor

$$S_{\mu\nu} = \varepsilon\,g_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu} \quad \ldots \quad (3\,\text{b}) \qquad \varepsilon_{\mu\nu} = \frac{1}{2\,G}\,p_{\mu\nu} \quad \ldots \quad (4).$$

Definieren wir ferner als plastische Deformation die Gestaltänderung, so scheiden die hydrostatischen Spannungs- und Deformationszustände vollkommen aus und es bleiben nur die Deviatoren übrig, die man durch geeignete Transformation des Koordinatensystems immer auf drei zueinander senkrechte Schubspannungen zurückführen kann.

Was bedeutet nun die Tatsache, daß die Beziehung zwischen den Deviatoren durch eine einzige Elastizitätskonstante reguliert wird? Nichts weniger als dies, daß bei Mitteilung eines Spannungsimpulses, welcher das Material über die Plastizitätsgrenze hinaus bringt, auch der Deviator der nun entstehenden Deformationsgeschwindigkeiten proportional dem Deviator des elastischen Grenzspannungszustandes bleibt, der natürlich auch nach Eintreten der Plastizität sich geltend macht. Damit ist aber sofort die Plastizitätsbedingung gegeben.

Wir erhalten das dem Hookeschen Elastizitätsgesetz analoge einfachste Plastizitätsgesetz für den isotropen Körper, wenn wir für die potentielle Energie des Deviators einen Grenzbetrag festsetzen, der nicht überschritten werden kann.

Nehmen wir $2k$ als Plastizitätsgrenze beim einachsigen Zug, so erhalten wir die aufgespeicherte Energie des Deviators im Grenzfall durch doppelte skalare Ueberschiebung

$$A = \frac{1}{2} p_{\mu\nu}\, \varepsilon^{\mu\nu} = \frac{1}{4\,G}\, p_{\mu\nu}\, p^{\mu\nu} = \frac{2\,k^2}{3\,G}$$

oder als Plastizitätsbedingung

$$p_{\mu\nu} \cdot p^{\mu\nu} = \frac{8}{3}\, k^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5).$$

Diese Plastizitätsbedingung schließt sich sehr gut an die neuesten Versuchsergebnisse an. Den Kredit, den die Theorie des größten Schubes heute noch in technischen Kreisen genießt, verdankt sie lediglich dem Umstand, daß das Grenzprisma St. Venants, welches man durch Aussetzen der Hauptspannungen als Koordinatenachsen erhält, unserem Grenzzylinder einbeschrieben ist, so daß die bisherige Theorie als grobe Näherung betrachtet werden kann. Was geschieht nun, wenn ein größeres Gebiet eines festen Körpers ins plastische Fließen gekommen ist? Dann treten **außer** dem bereits erwähnten elastischen Spannungstensor noch Reibungsspannungen auf und wenn wir den Ansatz der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten einführen, so wird es möglich sein alle Spannungstensoren in den Deformationsgeschwindigkeiten $e_{\mu\nu}$ auszudrücken.

Dabei ist es zulässig, den Tensor der Deformationsgeschwindigkeiten von vornherein als Deviator, das heißt, das Material als inkompressibel zu betrachten. Wir erhalten so

für die Reibungsspannungen $\quad \overline{p} = 2\,\varkappa\, e_{\mu\nu} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6\,\mathrm{a})$

und für die elastischen Spannungen $\quad p = 2\,\lambda\, e_{\mu\nu} \quad \ldots \ldots \quad (6\,\mathrm{b}),$

wobei die letztere Gleichung natürlich nicht den Sinn eines Elastizitätsgesetzes hat, sondern lediglich zum Ausdruck bringt, daß nach Eintritt des Fließens der elastische Spannungszustand durch den Fließzustand geregelt wird, was ja auch unmittelbar einleuchtet.

Der Koeffizient λ kann aus der Plastizitätsbedingung bestimmt werden zu:

$$4\,\lambda^2\, e_{\mu\nu}\, e^{\mu\nu} = 8/3\; k^2$$

oder

$$\lambda = \frac{2\,k}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{e_{\mu\nu}\, e^{\mu\nu}}} = \frac{2\,k}{\sqrt{6}}\, \frac{1}{\sqrt{e_{\mu}{}^{\nu}\, e_{\nu}{}^{\mu}}} \quad \ldots \ldots \quad (7).$$

Die gemischten Komponenten haben den Vorteil, daß sie bei orthogonalen Koordinatensystemen direkt in die sogenannten physikalischen Komponenten übergehen, so wie sie bisher bei krummlinigen Systemen verwendet wurden. Beschränken wir uns auf die langsame plastische Bewegung, wie wir sie zum Beispiel in der Natur wahrnehmen an der Bewegung von Gletschern und von glühenden Lavamassen, in der Technik beim Schmieden, Pressen und Ziehen von Metallen, so wie beim Durchgang von Eisenmassen durch die Walzen eines Walzwerks, so können wir die Beschleunigungen vollkommen vernachlässigen. Bedenklicher ist die Annahme konstanter Temperatur, da die Erfahrung gelehrt hat, daß die Abkühlung glühender Massen den Fließvorgang in ganz wesentlichem Maße beeinflußt, aber auch diese Annahme ist für die erste Entwicklung der Theorie nicht zu umgehen.

Ist ϱ die Masse der Volumeneinheit, X^{μ} die Massenkraft, etwa die Schwere bei der Bewegung eines Gletschers, so haben wir als Gleichgewichtsbedingungen des Volumenelements, daß die Divergenz des Spannungszustandes und die Massenkraft einen Nullvektor bilden müssen. In den Symbolen des Riccikalküls mit einem ∇ als Zeichen der kovarianten Differentiation, das ist ein Differentiationsprozeß bei dem der Einfluß der Krummlinigkeit des Koordinatensystems ausgeschaltet wird.

$$\nabla_{\nu}\, P^{\mu\nu} + \nabla_{\nu}\, \overline{p}^{\mu\nu} + \varrho\, X^{\mu} = 0$$

und nach Einsetzen der Formeln (6a) und (6b)

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial p}{\partial x^{\nu}} + 2\,\varkappa\, \nabla_{\nu}\, e^{\mu\nu} + 2\, \nabla_{\nu}\, (\lambda\, e^{\mu\nu}) + \varrho\, X^{\mu} = 0.$$

Durch Ueberschieben mit dem kovarianten Fundamentaltensor $g_{\mu\sigma}$ wird hieraus

$$\frac{\partial p}{\partial x^{\sigma}} + 2\,\varkappa\, \nabla_{\nu}\, e_{\sigma}{}^{\nu} + 2\, \nabla_{\nu}\, (\lambda\, e_{\sigma}{}^{\nu}) + \varrho\, X_{\sigma} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (8).$$

Hierzu tritt noch die Gleichung

$$e_{\nu}{}^{\nu} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9).$$

Setzt man $\Delta_\nu (\lambda e_0^\nu) = 0$, so bleiben die Differentialgleichungen einer Flüssigkeit mit sehr großer Reibung und langsamer Bewegung übrig. Berechnet man aber die Arbeit der inneren Reibung, so erhält man ein Verhalten, das von dem einer reibenden Flüssigkeit total verschieden ist.

Die in der Volumeneinheit verlorengehende Energie D beträgt nämlich nicht

$$D = 2\varkappa\, e_{\mu\nu} e^{\mu\nu} \text{ wie bei einer Flüssigkeit,}$$

sondern

$$D = (p^{\mu\nu} + \bar{p}^{\mu\nu})\, e_{\mu\nu}$$

$$D = 2(\varkappa + \lambda)\, e_{\mu\nu} e^{\mu\nu} = 2(\varkappa + \lambda)\, \Sigma(e_\mu{}^\nu)^2.$$

Da $\Sigma(e_\mu{}^\nu)^2 = {}^2/_3 \frac{k^2}{\lambda^2}$,

so ist

$$D = {}^4/_3\, k^2/\lambda \, \frac{\varkappa + \lambda}{\lambda} \quad \ldots \ldots \quad (10).$$

Kann man λ rational in den Geschwindigkeiten ausdrücken, so ist eine Integration in geschlossener Form möglich. Dieser Fall tritt ein bei der rotationssymmetrischen stationären Strömung einer plastischen Masse durch ein gerades Rohr, sowie beim Zugversuch, solange das Material noch keine bemerkbare Einschnürung hat. Bemerkenswert ist, daß in diesem letzten Fall bei Fortdauer der gleichmäßigen Deformation der Stab nach einer endlichen Zeit verschwunden sein müßte.

In den 4 Gleichungen (8) und (9) treten 7 Unbekannte auf.

Haben wir eine stationäre Strömung, so müssen wir die Deformationsgeschwindigkeiten in den Geschwindigkeiten ausdrücken und haben dann ebenso viele Gleichungen als Unbekannte. Die $g^{\mu\nu}$ sind darin willkürlich wählbar. Stellen wir uns aber die Aufgabe, die Materieteilchen auf ihrer Bahn zu verfolgen, so müssen wir in dem Körper ein Koordinatensystem am Anfang der Bewegung an die Materieteilchen festheften und dann diese sich mitbewegende Bezugsmolluske als Koordinatensystem benutzen. Natürlich wird dieses System, wenn es auch anfangs rechtwinklig war, bald schiefwinklig werden. Wir haben daher allen Grund, unsere Gleichungen von vornherein in kovarianter Form zu schreiben.

Nun besteht eine einfache Beziehung zwischen dem kovarianten Fundamentaltensor unserer äquivoluminären Bezugsmolluske und den Komponenten des Deformationstensors.

Die Einheitsstrecken unseres Koordinatensystems sind nämlich gleich den Quadratwurzeln aus den Komponenten des Fundamentaltensors mit gleichen Indizes.

Die zeitliche Zunahme einer solchen Einheitsstrecke ist aber nichts anderes als die kovariante Komponente des Tensors der Geschwindigkeitsänderungen $e_{\mu\nu}$.

$$e_{\overline{\mu\nu}} = \frac{1}{2\sqrt{g_{\mu\mu} g_{\nu\nu}}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} \quad \ldots \ldots \quad (11).$$

Man sieht ohne weiteres, daß für $\mu = \nu$ die Formel richtig ist. Der allgemeine Fall erfordert eine etwas längere Zwischenrechnung, wobei man den Winkel zwischen den zwei Koordinatenrichtungen.

$$\cos(\mu\nu) = \frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{g_{\mu\mu}\, g_{\nu\nu}}}$$

einführen muß.

Zur Bestimmung der $g_{\mu\nu}$ haben wir als weitere Gleichungen die Bedingung, daß der Riemann Christoffeltensor, der sich durch die ersten und zweiten Abteilungen der $g_{\mu\nu}$ ausdrücken läßt, ein Nulltensor sein muß.

Die 6 Gleichungen, die wir so erhalten, sind aber nur drei unabhängigen Gleichungen gleichwertig, da die $g_{\mu\nu}$ auch durch die 3 Geschwindigkeitskomponenten sich ausdrücken lassen.

Eine angenäherte Integration des Gleichungsssystems ist für den ebenen Fall und für den rotationssymmetrischen Fall nicht ausgeschlossen. Abgesehen davon tragen die Gleichungen jedenfalls zur begrifflichen Klärung bei. — Der gegenwärtige Stand der Mechanik der Kontinua ist dadurch gekennzeichnet, daß in ganz übertriebener Weise die Aufmerksamkeit auf den Spannungszustand gerichtet ist, weil es an Methoden fehlte, um die plastischen Deformationen voraus zu berechnen. Aus dem Wunsche heraus, hierzu beizutragen, sind die obigen Ausführungen entstanden.